

# TOPOLOJİ DERS NOTLARI

Ayşe Borat

**Haziran, 2025**

(3. Güncelleme)

Ders notları hata barındırabilir. Hata tespit edilirse lütfen [ayse.borat@btu.edu.tr](mailto:ayse.borat@btu.edu.tr) adresinden yazar ile bağlantıya geçiniz.

## İÇERİK

1. Topolojik Uzaylar
2. Topolojinin Bazı
3. Kapalı Kümeler
4. İç, Kapanış ve Sınır
5. Yeni Topolojik Uzayların İnşası
  - a. Alt Uzay Topolojisi
  - b. Çarpım Topolojisi
  - c. Bölüm Topolojisi
6. Sürekli Fonksiyonlar
7. Topolojik Uzaylarda Diziler ve Dizisel Süreklilik
8. Homeomorfizma
9. Metrik Uzaylar
10. Bağlantılılık
11. Yol Bağlantılılık
12. Kompaktlık

## KAYNAKLAR



Tanım.  $X$  bir küme olsun.  $X$ 'in alt kümelerinden oluşan ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir  $\tau$  koleksiyonu verilsin.

(T1)  $X, \emptyset \in \tau$ .

(T2)  $\tau$ 'daki elemanların herhangi birleşimi yine  $\tau$ 'dadır.

$\forall \alpha \in I$  için  $U_\alpha \in \tau$  olsun. (Burada  $I$  sonlu veya sonsuz indeks kümesi)

$\Downarrow$

Bu durumda  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$  olur.

(T3)  $\tau$ 'daki elemanların sonlu kesişimi yine  $\tau$ 'dadır.

$\{U_1, \dots, U_n\} \subseteq \tau$  ise  $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$  olur.

Burada

- $\tau$ 'ya **topoloji** denir.
- $(X, \tau)$ 'ya (ve ya kısaca  $X$ 'e) **topolojik uzay** denir.
- $\tau$ 'nın elemanlarına  $X$ 'in **açık** alt kümeleri denir.

- Açık kümelerin tümüne **kapalı** denir.

(  $V^c = X \setminus V \in \mathcal{T}$  ise  $V$ 'ye kapalı denir.)

ÖRNEK.

$$(a) \left. \begin{array}{l} X = \{a, b, c\} \\ \mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\} \end{array} \right\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_1) \text{ top. uz.}$$

$$(b) \left. \begin{array}{l} X = \{a, b, c\} \\ \mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}\} \end{array} \right\} \Rightarrow (X, \mathcal{T}_2) \text{ top. uz. } \underline{\text{DEĞİL.}}$$

Örnek & Tanım.  $X$  herhangi bir küme olsun.

(a)  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$  :  $X$ 'in tüm alt kümelerinin ailesi olsun.

$\Downarrow$

$\mathcal{T}$ 'ya **diskret / ayrık topoloji** denir.  
(discrete)

$(X, \mathcal{T})$ 'ya **diskret uzay** denir.

(b)  $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$  olsun.

$\Downarrow$

$\mathcal{T}$ 'ya **indiskret topoloji**,  $(X, \mathcal{T})$ 'ya da **indiskret uzay** denir.

ÖRNEK. (Sonlu kımleyeler topoloji / Finite complement topology)

$\mathbb{R}$  üzerinde şu şekilde bir topoloji kuralım:

$$\tau_{fc} = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq \mathbb{R} \mid U^c \text{ sonlu}\}$$

Ödev:  $\tau_{fc}$  gerçekten bir topolojidir.

Gösteriniz.

$(\mathbb{R}, \tau_{fc})$ 'ye sonlu kımleyeler uzayı

denir. Kısaca  $\mathbb{R}_{fc}$  ile gösterilir.

Örneğin,  $U_1 = \mathbb{R} - \{0, 3, 7\} \in \tau_{fc}$  'dir. Çünkü

$$U_1^c = \{0, 3, 7\} \text{ sonludur.}$$

$U_2 = (-1, 1) \notin \tau_{fc}$  'dir. Çünkü

$$U_2^c = (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \text{ sonlu değildir.}$$

$$\tau_{fc} = \{\mathbb{R}\} \cup \{K \mid K \subseteq \mathbb{R} \text{ sonlu}\}$$

Kapalılar kımeyesi.

(Uzayın kapalılarından oluşur)

Tanım.  $(X, \tau_1)$  ve  $(X, \tau_2)$  verilsin.

$\tau_1 \subseteq \tau_2 \Rightarrow \tau_1$ 'e  $\tau_2$ 'den daha kabadır denir.

$\tau_1 \subseteq \tau_2 \Rightarrow \tau_2$ 'ye  $\tau_1$ 'den daha inceştir denir.

ÖRNEK.  $X = \{a, b, c\}$   
 $\tau = \{\emptyset, \{a\}\}$   
 $\tau^* = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$  } verilsin.

$\tau \subseteq \tau^*$  olduğunda,  $\tau, \tau^*$  'dan daha kabardır  
 &

$\tau^*, \tau$  'dan daha incedir.

Tanım.  $X$  top. uz. ve  $x \in X$  olsun.

$x$ 'i içeren bir ağığa ( $x$ 'in ağığına)  $x$ 'in komşuluğu denir.  
 (neighbourhood of  $x$ )

$x$ 'in komşuluklarının kümesi  $\mathcal{U}(x)$  veya  $\mathcal{N}(x)$  ile gösterilir.

Teorem.  $X$  bir top. uz. ve  $A \subseteq X$  alt küme olsun.

$A \subseteq X$  açıktır.  $\iff \forall x \in A$  için  $\exists U \in \mathcal{U}(x) : U \subseteq A$  olur.

iç nokta tanımı

$\iff \forall x \in A$  için,  $x, A$ 'nin iç noktasıdır.

İspat.  $\Rightarrow$ :  $A \subseteq X$  açık olsun.

Amaç. Herhangi  $x \in A$  için  $\exists U \in \mathcal{U}(x)$  vardır ki  $U \subseteq A$  olur.

$U := A$  alalım.  
 1

$U := A$  alalım.

↖  $U$ 'yu bu şekilde  
alabiliriz çünkü  $x \in A$  &  $A$  açık.

Böylece  $U \overset{=}{=} A$   $U \in \mathcal{U}(x)$  bulduk ki  $A \subseteq A$ .

← : Amaç.  $A \subseteq X$  açık old. göstermek.

$\forall x \in A$  için  $\exists U_x \in \mathcal{U}(x)$  vardır ki  $x \in U_x \subseteq A$  var.

$$A = \bigcup_{x \in A} U_x$$



$A$  açıktır.  $\square$

↖  $U_x$ 'ler  
açık &  
birleşimleri  
de açık

Union lemma.

$X$  bir küme olsun.

$\mathcal{C} : X$ 'in alt kümelerinin koleksiyonu

$\forall x \in X$  için  $\exists A_x \in \mathcal{C}$  vardır ki

$x \in A_x$  oluyorsa

$$\bigcup_{x \in A} A_x = X \text{ olur.}$$

Amaç. Genel olarak, tüm açık kümelerin koleksiyonunu (yani topolojiyi) yazmak zordur.

Tüm açıkları yazmak yerine, daha küçük bir koleksiyon alacağız ve bu yeni koleksiyondaki açık kümeler tüm açık kümeleri gerek / güretecek / doğuracak.

Tanım.  $X$  bir küme olsun.  $\mathcal{B}$ ,  $X$ 'in alt kümelerinin bir koleksiyonu olsun. Eğer

i)  $\forall x \in X$  için  $\exists B \in \mathcal{B}$  vardır ki  $x \in B$  olur.

ii)  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  ve  $x \in B_1 \cap B_2$  ise

$\exists B_3 \in \mathcal{B}$  vardır ki  $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$  olur.

şartları sağlanıyorsa,  $\mathcal{B}$ 'ye baz denir.

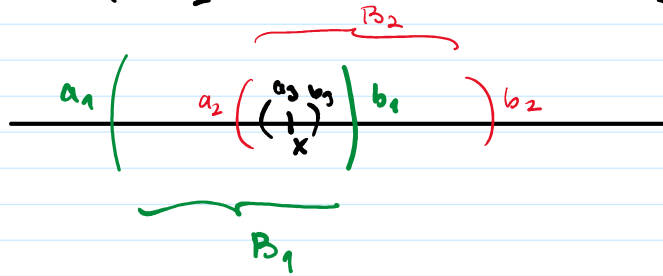
$\uparrow$   
( $X$ 'teki bir topoloji için bir baz)

ÖRNEK.  $\mathbb{R}$ 'de  $\mathcal{B} = \{ (a, b) \subset \mathbb{R} \mid a < b \}$  alalım.

i)  $\forall x \in \mathbb{R}$  için  $\exists B \in \mathcal{B}$  vardır ki  $x \in B$  olur.  
 $\parallel$   
 $(x-1, x+1)$

i)  $\forall x \in \mathbb{R}$  için  $\exists B \in \mathcal{B}$  vardır ki  $x \in B$  olur.  
 $\parallel$   
 $(x-1, x+1)$

ii)  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  ve  $x \in B_1 \cap B_2$  olsun.



Bu durumda  $\exists B_3 \in \mathcal{B}$  vardır ki  
 $= (a_3, b_3)$

$x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$  olur.

$B_3$ 'ün varlığını nasıl garantileriz?  
 $a_2$  ve  $x$  arasında  $\exists a_3 \in \mathbb{R}$  vardır  
 $x$  ve  $b_1$  — " —  $\exists b_3 \in \mathbb{R}$  vardır.

↗  
 Arşimet Teoreminin sonucu: İki reel sayı arasında  
 en az bir tane rasyonel sayı vardır.  $\square$

ÖRNEK.  $X$  bir küme ve  $\mathcal{B} = \{ \{x\} \mid x \in X \}$  olsun.

i)  $\forall x \in X$  için  $\exists B = \{x\} \in \mathcal{B}$  vardır ki  $x \in B = \{x\}$  olur.

ii)  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  alalım.

→ Eğer  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$  ise gösterilecek bir şey

yok.

→ Eğer  $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$  ise  $B_1 = B_2$  olmak  
sonunda böylece  $B_3 = B_1$  seçilebilir.  $\square$

Ödev.  $X = \{a, b, c, d\}$  verilsin.

$\mathcal{B} = \{\{a\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}\}$   $X$ 'teki bir topoloji  
için bir baz mıdır?

Soru. Bazdan topoloji nasıl elde edilir?

(Bir baz bir topolojiyi nasıl verir/oluşturur?)

Tanım.  $\mathcal{B}$ ,  $X$  kümesini üzerinde bir baz olsun.

$\mathcal{B}$  ile verilen  $\tau$  topolojisi,  $\tau$ 'nin elemanlarını  
( $X$ 'in açıklarını)

şu şekilde tanımlar:

- $\emptyset$  açıktır.
- $\tau$ 'daki her bir eleman, baz elemanlarının bir birleşimine eşittir.



Soru: Bu şekilde elde edilen  $\tau$  gerçekten bir topoloji midir?



Teorem. Evet.

ÖRNEK.  $\mathcal{B} = \{ (a,b) \subseteq \mathbb{R} \mid a < b \}$  'in  $\mathbb{R}$  için bir baz olduğunu söyledik.

$\mathcal{B}$  ile verilen  $\mathbb{R}$ 'deki topolojiye  $\mathbb{R}$ 'deki standart topoloji denir ve  $\tau_s$  ile gösterilir.

Not:  $\tau_s$ ,  $\mathbb{R}$  üzerinde en çok kullanılan topolojidir.

Eğer " $\mathbb{R}$  topolojik uzayını" atalım dersen özel olarak hangi topoloji olduğu belirtilmemişse,  $\tau_s$  alınıyordur.

ÖRNEK. Başka farklı  $X$  kümesi için

$\mathcal{B} = \{ \{x\} \mid x \in B \}$  'in bir baz belirttiğini gösterdik.

$\mathcal{B}$ 'nin gerdiği topoloji diskret topolojidir.

Çünkü açık kümeler tek elemanlı kümelerin herhangi birleşimidir (ve boş kümedir).

NOT: Bazı elemanlarının kendileri de bir açık kümedir.  
( $T$ 'nin elemanıdır)

ÖRNEK.  $\mathbb{R}$ 'de  $\mathcal{B} = \{ [a, b) \subset \mathbb{R} \mid a < b \}$  alalım.

- $\mathcal{B}$  bir bazdır. (Ödev)
- $\mathcal{B}$  tarafından doğrudan tanımlanan topolojiye alt limit topolojisi (lower limit tp.) denir ve  $\tau_\ell$  ile gösterilir.

$\tau_\ell$ 'nin elemanlarından bazıları :

a)  $[0, 2) \in \tau_\ell$ 'dir. Çünkü  $[0, 2) \in \mathcal{B}$ .

b)  $(0, 2) \in \tau_\ell$ 'dir. Çünkü  $(0, 2) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} [\frac{1}{n}, 2)$  & (T2).

c)  $[0, \infty) \in \tau_\ell$ 'dir. Çünkü  $[0, \infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} [0, n)$  & (T2).

d)  $(0, \infty) \in \tau_\ell$ 'dir. Çünkü  $(0, \infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} (0, n)$   
(b)'den dolayı  $(0, n) \in \tau_\ell$

& (T2) den dolayı

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} (0, n) \in \tau_\ell$ .

e)  $(-\infty, 0) \in \tau_\ell$ 'dir. Çünkü  $(-\infty, 0) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} [-n, 0)$  & (T2).

f)  $(-3, -1) \cup [0, \infty) \in \tau_\ell$  çünkü  $(-3, -1) \in \tau_\ell$  (b) stilinde  
 $[0, \infty) \in \tau_\ell$

$$[0, \infty) \in \tau_c$$

&

(T2)'den dolayı  $(-3, -1) \cup [0, \infty) \in \tau_c$ .

ÖRNEK.  $\mathbb{R}$ 'de  $\mathcal{B} = \{ (a, b] \subset \mathbb{R} \mid a < b \}$  alalım.

•  $\mathcal{B}$  bir bazdır. (Ödev)

•  $\mathcal{B}$  tarafından doğrudan topolojiye üst limit topolojisi (upper limit top.) denir ve  $\tau_u$  ile gösterilir.

Ödev.  $(\mathbb{R}, \tau_u)$  uzayının açıkları araştırınız.

Teorem.  $X$  bir küme olsun.  $\mathcal{B}$ ,  $X$  üzerindeki bir topoloji için bir olsun.

$U$ ,  $\mathcal{B}$  tarafından

gerilen / doğrudan

topoloji için bir açıktır.

$\Leftrightarrow$

$\forall x \in U$  için

$\exists B_x \in \mathcal{B}$  vardır ki

$x \in B_x \subseteq U$  olur.

ÖRNEK.  $(\mathbb{R}^2)$ 'de standart topoloji)

•  $\forall x \in \mathbb{R}^2$  ve  $\varepsilon > 0$  için,

$\mathbb{R}^2$ 'deki standart metrik

$B(x, \varepsilon) := \{ y \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, y) < \varepsilon \}$  tanımlayalım.

Metrik uzaylara asina degilseniz,

$B(x, \varepsilon) := \{y \in \mathbb{R}^2 \mid |y - x| < \varepsilon\}$  da alabilirsiniz.

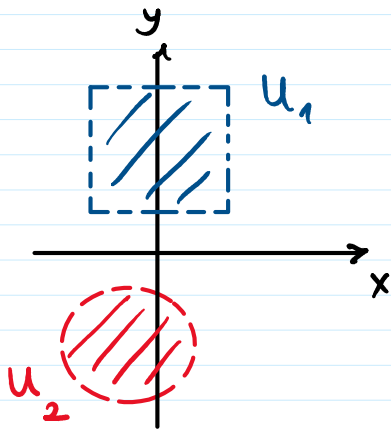
$B(x, \varepsilon)$ 'a  $x$  merkezli  $\varepsilon$  yarıçaplı **açık disk / yuvar**  
(open disk / ball)  
denir.

•  $\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0\}$  alalım.

$\mathcal{B}$ ,  $\mathbb{R}^2$ 'deki bir topoloji için bir bazdır. (Ödev)

•  $\mathcal{B}$  ile doğrudan topolojiye  $\mathbb{R}^2$ 'de **standart topoloji** denir  
ve  $\tau_s$  ile gösterilir.

$(\mathbb{R}^2, \tau_s)$ 'deki açıklara örnek:



ÖRNEK. ( $\mathbb{R}^n$ 'de standart topoloji)

Benzer şekilde  $\mathbb{R}^n$ 'deki standart topoloji de tanımlar.

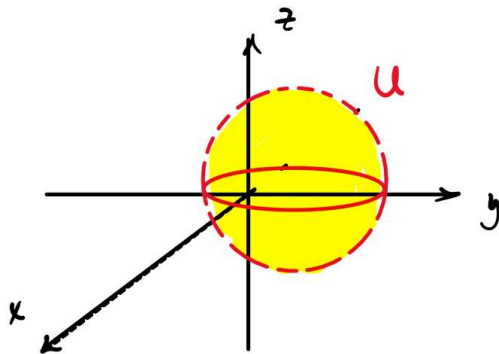
$$\left. \begin{array}{l} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{array} \right\} \in \mathbb{R}^n \text{ olm. } \exists.$$

$$d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

$\mathbb{R}^n$ 'deki standart metriği alalım.

- $B(x, \varepsilon) := \{ y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < \varepsilon \}$  tanımlansın.
- $\mathcal{B} = \{ B(x, \varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0 \}$   $\mathbb{R}^n$ 'deki bir topoloji için bir bazdır.
- $\mathcal{B}$ 'nin doğurduğu topolojiye  $\mathbb{R}^n$ 'deki standart topoloji denir.

Örneğin, aşağıdaki  $U, (\mathbb{R}^3, \tau_s)$ 'de bir açıktır.



Tanım.  $A \subseteq X$  kapalıdır. :  $\Leftrightarrow X - A \subseteq X$  açıktır.

ÖRNEK.  $(\mathbb{R}, \tau_s)$ 'yi alalım.

- $[a, b]$  kapalıdır. Çünkü  $\mathbb{R} - [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty) \stackrel{\uparrow}{\tau_s}$ .
- $\{c\}$  kapalıdır. Çünkü  $\mathbb{R} - \{c\} = (-\infty, c) \cup (c, \infty) \in \tau_s$ .
- $(-\infty, a] \cup [b, \infty)$  kapalıdır. Çünkü  $(a, b) \in \tau_s$ .

ÖRNEK.  $X = \{a, b, c, d\}$  üzerinde

$\tau = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{b\}, \{b, c, d\}, \{c, d\}\}$  verilsin.

Not:  $U$  kapalı değil ise " $U$  açıktır" diyemeyiz!

(1) ve (3)'e bakınız.

①  $\{b\}$  açık. Çünkü  $\{b\} \in \tau$ .

$\{b\}$  kapalı değil. Çünkü  $X - \{b\} = \{a, c, d\} \notin \tau$ .  
(açık değil)

②  $\{a, b\}$  açık. Çünkü  $\{a, b\} \in \tau$ .

②  $\{a, b\}$  açık. Çünkü  $\{a, b\} \in \mathcal{T}$ .

$\{a, b\}$  kapalı. Çünkü  $X - \{a, b\} \in \mathcal{T}$ .

NOT: Benzer şekilde,  $U$  açık değil ise  
"U kapalıdır" diyemeyiz!

(3) ve (4)'e bakınız.

③  $\{b, c\}$  açık değil. Çünkü  $\{b, c\} \notin \mathcal{T}$ .

$\{b, c\}$  kapalı değil. Çünkü  $X - \{b, c\} \notin \mathcal{T}$ .

④  $\{a\}$  açık değil. Çünkü  $\{a\} \notin \mathcal{T}$ .

$\{a\}$  kapalı. Çünkü  $X - \{a\} \in \mathcal{T}$ .

NOT:  $U$  hem açık hem kapalı olabilir.  
(2)'ye bakınız.

NOT:  $U$  ne açık ne de kapalı olabilir.  
(3)'e bakınız.





Teorem.  $X$  bir kp.  $\mathcal{U}$ . olsun.

$\mathcal{K}$  :  $X$ 'in kapalı kümelerinin bir koleksiyonu olsun.

$\mathcal{K}$  için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(K1)  $X, \emptyset$  kapalıdır.

(K2)  $\mathcal{K}$ 'daki kümelerin herhangi kesişimi yine  $\mathcal{K}$ 'dadır.  
(sonlu veya sonsuz)

(K3)  $\mathcal{K}$ 'daki kümelerin sonlu birleşimi yine  $\mathcal{K}$ 'dadır.

İspat. (Ödev)

Tanım.  $(X, \tau)$  top. uz. ve  $A \subseteq X$  olsun.

- $A$ 'nın içerdığı tüm açıkların birleşimine  $A$ 'nın **ici** denir  
(interior of  $A$ )  
ve  $\text{int } A$  veya  $A^\circ$  ile gösterilir.

$$\text{int } A = \bigcup \{ U \in \tau \mid U \subseteq A \}.$$

- $A$ 'yı içeren tüm kapalıların birleşimine  $A$ 'nın **kapanışı** denir ve  $\text{cl } A$  veya  $\bar{A}$  ile gösterilir.  
(closure of  $A$ )

$$\text{cl } A = \bigcap \{ K \in \mathcal{K} \mid K \supseteq A \}.$$

Önerme. 1.  $\text{int } A \subseteq A \subseteq \text{cl } A$ .

2.  $\text{int } A$  açıktır.

3.  $\text{cl } A$  kapalıdır.

İspat. (Ödev)

Teorem<sup>1</sup>.  $X$  top uz. ve  $A, B \subseteq X$  olsun.

$$1. U \subseteq X \text{ açık} \ \& \ U \subseteq A \implies U \subseteq \text{int } A.$$

$$2. K \subseteq X \text{ kapalı} \ \& \ A \subseteq K \implies \text{cl } A \subseteq K.$$

$$3. A \subseteq B \implies \text{int } A \subseteq \text{int } B.$$

$$4. A \subseteq B \implies \text{cl } A \subseteq \text{cl } B.$$

$$5. A \subseteq X \text{ açık.} \iff A = \text{int } A.$$

$$6. A \subseteq X \text{ kapalı.} \iff A = \text{cl } A.$$

İspat.

(1)  $\text{int } A = A'$  'nın içerdiği tüm açıkların birleşimi.

$U \subseteq A$  &  $U \subseteq X$  açık ise  $U, \text{int } A$  'yı oluşturan  
açıklardan biridir.  $\implies U \subseteq \text{int } A. \square$

(3) Amaç.  $\text{int } A \subseteq \text{int } B$  old. göstermek.

$A \subseteq B$  olsun.  $\implies \text{int } A \subseteq A \subseteq B$  vardır.

önceki  
Önerme

↑  
veriliyor

$\text{int } B$  :  $B$ 'nin içerdigi acikların birleşimi  
&

o aciklardan biri  $\text{int } A$  !

↓

$$\text{int } A \subseteq \text{int } B. \quad \square$$

(5)  $\Leftarrow$  :  $A = \text{int } A$  olsun.

$\text{int } A$  acik olduğundan  $A$  da acik.  
(önceki örneğe)

$\Rightarrow$  :  $A \subseteq X$  acik olsun. Amaç.  $A = \text{int } A$  old. göstermek.

$\text{int } A \subseteq A$  her zaman doğru (önceki örneğe).

$A \subseteq \text{int } A$  mı?

$\text{int } A$  tanımından,  $A$ 'nın içerdigi aciklardan biri  $A$ .

↑  
 $A$  acik (veiliyor)  
ve  $A \subseteq A$  ob. için

↓

$$A \subseteq \text{int } A. \quad \square$$

Ödev. (2) - (4) - (6)'yı ispatlayınız.

Örnek. 1.  $\text{int } A = A'$  nin içerdigi en büyük açık.  
2.  $\text{cl } A = A'$  yi içeren en küçük kapalı.

Örnek.  $(\mathbb{R}, \tau_s)$  verilsin.  $A = [0, 1) \subseteq \mathbb{R}$  alalım.

$$\text{int } A = (0, 1)$$

$$\text{cl } A = [0, 1]$$

Örnek.  $(\mathbb{R}, \tau_{\text{diskret}})$  verilsin.  $A = [0, 1) \subseteq \mathbb{R}$  alalım.

$$\text{int } A = [0, 1)$$

$$\text{cl } A = [0, 1)$$

Örnek.  $(\mathbb{R}, \tau_e)$  alt limit topolojisi verilsin.

$$A = [0, 1) \subseteq \mathbb{R} \text{ alalım,}$$

$$\text{int } A = [0, 1)$$

$$\text{cl } A = [0, 1)$$

NOT:  $\text{cl } A$  ve  $\text{int } A$  sadece  $A'$  ya değil, topolojiye de bağlıdır.

de bağlıdır.

Tanım.  $X$  top. uz. ve  $A \subseteq X$  olsun.

$A \subseteq X$  yoğunudur.  $:\Leftrightarrow cl A = X$ .

ÖRNEK.  $(\mathbb{R}, \tau_{fc})$  sonlu kümeler topolojisi verilsin.

$(\mathbb{R}, \tau_{fc})$ 'de tüm sonsuz kümeler bu uzayda yoğundur.

Çünkü  $A \subseteq \mathbb{R}$  sonsuz ise

$cl A = A'$ 'yı içeren en küçük kapalı  $= \mathbb{R}$ .  $\square$

Soru: Bir y noktasının  $\text{int } A$  ve ya  $\text{cl } A$  içinde olması nasıl ifade edilir?

Teorem<sup>2</sup>:  $(X, \tau)$  top. uz. ve  $A \subseteq X$  olsun.  $y \in X$  alalım.

$$y \in \text{int } A \iff \exists U \subseteq X \text{ açık vardır ki } y \in U \subseteq A.$$

— iç nokta tanımı

$$\iff y, A' \text{nin iç noktasıdır.}$$

İspat.  $\Rightarrow$  :  $y \in \text{int } A$  olsun.

$$y \in \text{int } A = \bigcup \{ U \in \tau \mid U \subseteq A \} \text{ ise}$$

$\exists U \in \tau$  için  $y \in U$  olur ( $\text{int } A$  tanımından  $U \subseteq A$ 'dır).

Böylece  $\exists U \in \tau$  böyle ki  $y \in U \subseteq A$  olur.

$\Leftarrow$  :  $\exists U \subseteq X$  açık vardır ki  $y \in U \subseteq A$  olsun.

$U, A$  tarafından kapsanan açıktır. Böylece  $\text{int } A$ 'yı oluşturan açıklerden biridir. Yani,  $U \subseteq \text{int } A$  olur.

Böylece  $y \in U$  olduğundan  $y \in \text{int } A$ 'dır.  $\square$

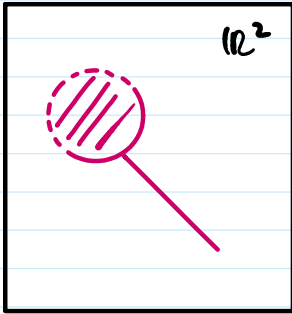
Teorem<sup>3</sup>.  $X$  top. uz. ve  $A \subseteq X$  olsun.  $y \in X$  alalım.

$$y \in \text{cl } A \iff \forall U \in \mathcal{U}(y) \text{ için } U \cap A \neq \emptyset.$$

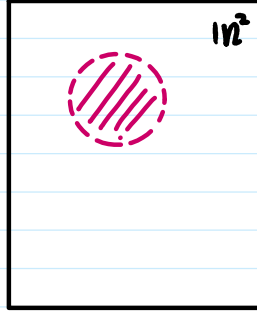


$y$ 'ye  $A$ 'nın kapalı noktası denir.

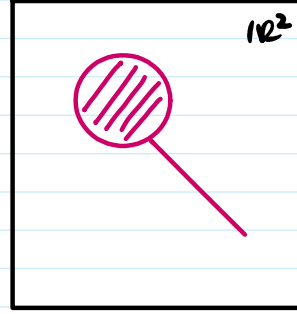
ÖRNEK.  $(\mathbb{R}^2, \tau_s)$  verilsin.



$A$



$\text{int } A$



$\text{cl } A$



Teorem<sup>4</sup>:  $X$  top. vt. ve  $A, B \subseteq X$  olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler vardır.

1.  $\text{int}(X-A) = X - \text{cl } A$ .

2.  $\text{cl}(X - A) = X - \text{int } A$ .

3.  $\text{int } A \cup \text{int } B \subseteq \text{int } (A \cup B).$

(görelde eşitlik yoktur  $\neq$ )

4.  $\text{int } A \cap \text{int } B = \text{int } (A \cap B)$ .

Ödev. Teorem' (3) için eşitliğin olması bir örnek veriniz.

İspat.

(1) Amaç.  $\left. \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \text{int}(X - A) \subseteq X - \text{cl } A \\ \& \\ \text{(b)} \quad X - \text{cl } A \subseteq \text{int}(X - A) \end{array} \right\} \text{old. göstermek}$

(a)  $x \in \text{int}(X - A)$  olsun.

$$\text{int}(X-A) \cap A = \emptyset \text{ old. gözlemleyiniz.}$$

Eğer  $x \in cl(A)$  dıysak  $(\forall U \in \mathcal{U}(x)$  için  $U \cap A \neq \emptyset$  dısaydı)

Eğer  $x \in cl A$  olsaydı ( $\forall U \in \mathcal{U}(x)$  için  $U \cap A \neq \emptyset$  olsaydı),

$\text{int}(X-A) \cap A \neq \emptyset$  olurdu.

Fakat bu doğru olmadığı için  
 $x \notin cl A$ .

$\Downarrow$

$x \in X - cl A$ .

$\rightarrow \text{int}(X-A)$  da bir  
açık ve  $x \in \text{int}(X-A)$ .

Bu durumda  
 $\text{int}(X-A) \cap A \neq \emptyset$   
olurdu.

(b)  $cl A$  kapalıdır &  $A \subseteq cl A$  old. biliyoruz.

$\Downarrow$

$X - cl A$  açıktır.

$\Downarrow$

$X - A \supseteq X - cl A$ .

$X - cl A$  açık &  $X - A$ 'nin içindedir.

$\Downarrow$

$\emptyset \neq X - cl A \subseteq \text{int}(X-A)$ .  $\square$

(2) Amaç.  $\text{int} A \cup \text{int} B \subseteq \text{int}(A \cup B)$ .

$\text{int} A \subseteq A$

&

$\text{int} B \subseteq B$ .

$\Downarrow$

$\text{int} A \subseteq A \subseteq A \cup B$

$\Downarrow$

$\text{int} B \subseteq B \subseteq A \cup B$

$\text{int} A$ ,  $\text{int} B$  açık ve  $A \cup B$ 'nin içinde.

$\Downarrow \leftarrow \text{int}(A \cup B)$  tanımından

↓ ←  $\text{Int}(A \cup B)$  tanımından

○ zannediyoruz  $\text{Int} A \cup \text{Int} B \subseteq \text{Int}(A \cup B)$ . □

Tanım.  $X$  top. uz. ve  $A \subseteq X$  olsun.  $x \in X$  alalım.

$x$ ,  $A$ 'nin limit noktasıdır.  $\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}(x)$  için  $\exists y \neq x$  vardır  
ki  $y \in U \cap A$  olur.

NOT:  $x$ ,  $A$ 'nin limit noktası ise  $x \in A$  olmak  
zorunda değildir!

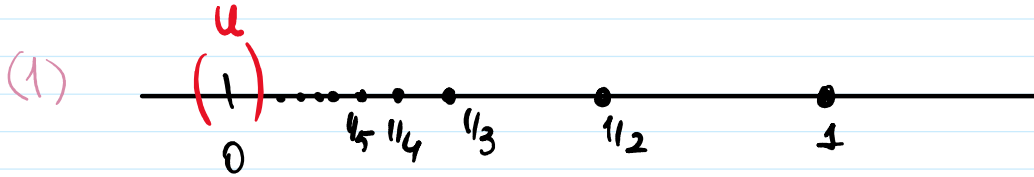
ÖRNEK.  $(X, \tau)$  herhangi top. uz. olsun.

$x$ ,  $\{x\}$ 'in limit noktası değildir. NEDEN?

ÖRNEK.  $(\mathbb{R}, \tau_s)$  verilsin.  $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \subseteq \mathbb{R}$  alalım.

1) 0,  $A$ 'nın limit noktasıdır. Gösteriniz.

2) 0,  $A$ 'nın tek limit noktasıdır. Gösteriniz.



Herhangi  $u \in \mathcal{U}(0)$  alalım.

"  
 $(-\delta, \varepsilon)$  (Burada  $\delta, \varepsilon > 0$ )

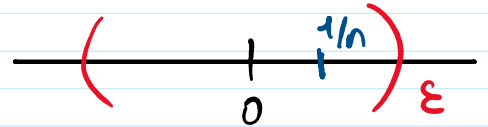
$u \cap A \neq \emptyset$  olur. Böylece 0,  $A$ 'nın limit noktasıdır.

**NEDEN?**

↓

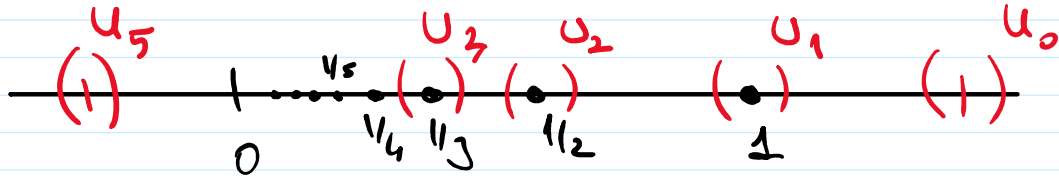
Çünkü Arşimet Özelliğinden,  $\forall x = \frac{1}{\varepsilon}$  için  $\exists n \in \mathbb{Z}$  vardır ki

$x < n$  olur. Böylece  $\frac{1}{\varepsilon} < n \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$  bulunur.



(2)  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$  alalım. Eğer  $x$ 'in  $A$ 'nın limit noktası

olmadığını gösterirsek ispat biter.



- Eğer  $x > 1$  ve ya  $x < 0$  ise  $\exists U \subseteq \mathbb{R}$  açık  
( $U_0, U_5$  gibi)  
buluruz ki  $A$  ile kesişmez.

- Eğer  $x \in (0, 1]$  ise  $\exists U \subseteq \mathbb{R}$  açık buluruz ki  
( $U_1, U_2, U_3$  gibi)

$A$  ile tek noktada ( $x$ 'te) kesişir.



2 durumda da  $x, A$ 'nın limit noktası değildir.  $\square$

Teorem 5.  $X$  top. uz. ve  $A \subseteq X$  olsun.

$A' = A$ 'nın limit noktalarının kümesi olsun.

Bu durumda  $\text{cl } A = A \cup A'$  olur.

ÖRNEK. Önceki örneğe dönelim.  $(\mathbb{R}, \tau_s)$ 'da

$A = \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+ \}$  aldık.

$A' = \{0\}$  bulduk.

Bu durumda  $\text{cl } A = A' \cup A$

$$= \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

Sonuç.  $X$  top. uz. olsun.

$A \subseteq X$  kapalıdır.  $\Leftrightarrow A$ , tüm limit noktalarını içerir.

İspat.  $\Rightarrow$ : Teorem' (6):  $A \subseteq X$  kapalıdır.  $\Leftrightarrow \text{cl } A = A$ . <sup>(1)</sup>

Teorem' 'ten  $\text{cl } A = A' \cup A$ . <sup>(2)</sup>

Bu durumda,  $A = \underset{\substack{\uparrow \\ (1)}}{\text{cl } A} = \underset{\substack{\uparrow \\ (2)}}{A' \cup A}$  olur.

$$\left. \begin{array}{l} A \subseteq A' \cup A \text{ (her zaman var)} \\ \underline{A \supseteq A' \cup A} \end{array} \right\} \text{ bulunur.}$$



$A' \subseteq A$  olmak zorundadır.

$\Leftarrow$ :  $A' \subseteq A$  olsun.

Amaç.  $A \subseteq X$  kapalı old. göstermek.

$$A' \subseteq A \longrightarrow A' \cup A \subseteq A.$$

/  
2 tarafın A ile  
birleşimini alın.

$$\longrightarrow A' \cup A = A \text{ olur.}$$

Ayrıca  $A \subseteq A' \cup A$  (her zaman var).

Diğer taraftan,  $\text{cl } A = A' \cup A$  oldu için,

$$\text{cl } A = A \text{ bulunur.} \longrightarrow A \text{ kapalıdır. } \square$$

(1)

ÖRNEK.  $(\mathbb{R}, \tau_s)$  alalım.  $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$  kapalı mı?

0,  $A$ 'nin limit nok. fakat  $0 \notin A$ .

$A$ , tüm limit noktalarını içermiyor. Sonuçtan

$A$ , kapalı değil.

Tanım.  $X$  top. uz. ve  $A \subseteq X$  olsun.

$\partial A := \text{cl } A - \text{int } A$  ya  $A$ 'nin **sınırı** denir.  
(boundary)

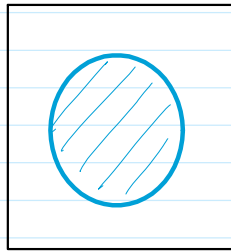
ÖRNEK.  $(\mathbb{R}, \tau_s)$  alalım.

$$\begin{aligned} A = [-1, 1] \text{ için } \partial A &= \text{cl } A - \text{int } A = [-1, 1] - (-1, 1) \\ &= \{-1, 1\}. \end{aligned}$$

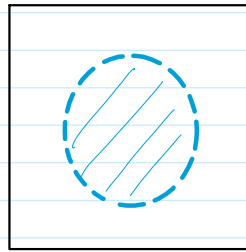
### ÖRNEK.



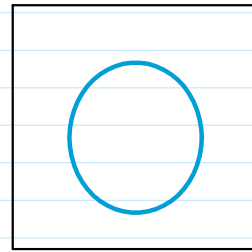
$A$



$cl A$



$int A$



$\partial A$

Teorem<sup>6</sup>.  $X$  top. uz. ve  $A \subseteq X$  olsun.

Bu durumda  $\partial A \subseteq X$  kapalıdır.

Teorem<sup>7</sup>.  $X$  top. uz. ve  $A \subseteq X$  olsun.

$x \in \partial A. \iff \forall U \in \mathcal{U}(x), \text{ hem } A \text{ hem de } X-A \text{ ile kesişir.}$

$$\left[ \begin{array}{l} \forall U \in \mathcal{U}(x) \text{ için } U \cap A \neq \emptyset \\ \text{ve} \\ U \cap (X-A) \neq \emptyset. \end{array} \right]$$



Amaç.  $X$  topolojik uzay olsun.  $A \subseteq X$  alt küme olsun.

$A$  üzerinde bir topoloji tanımlayacağız.

Ve bunu  $X$ 'teki topolojiyi kullanarak doğal bir şekilde yapacağız.



İspat. (i)  $\varphi/\sigma \sim A$  var.

Çünkü  $\phi = A \cap \phi \in \tau$

$$A = A \cap X \in \tau.$$

$$(T2) \{ \forall \alpha \in \tau_A \mid \alpha \in I \} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} \alpha \stackrel{?}{\in} \tau_A$$

sonlu/sonsuz  
indeks kümesi

$\forall \alpha \in \tau_A$  oldu için  $\exists U_\alpha \in \tau$  vardır ki  $V_\alpha = U_\alpha \cap A$ .

$$\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (U_\alpha \cap A) = \left( \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \right) \cap A \in \tau_A.$$

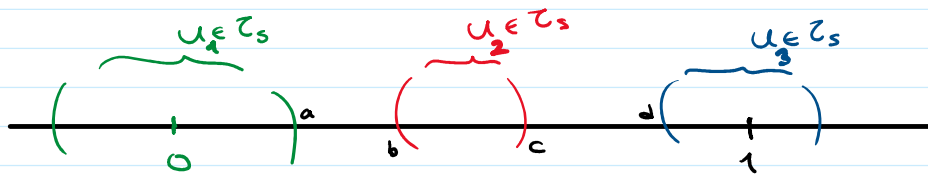
$$(T3) \forall_1, \dots, \forall_n \in \tau_A \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n V_i \stackrel{?}{\in} \tau_A$$

$\forall i=1, \dots, n$  için

$V_i \in \tau_A$  ise  $\exists U_i \in \tau$  vardır ki  $V_i = U_i \cap A$  olur.

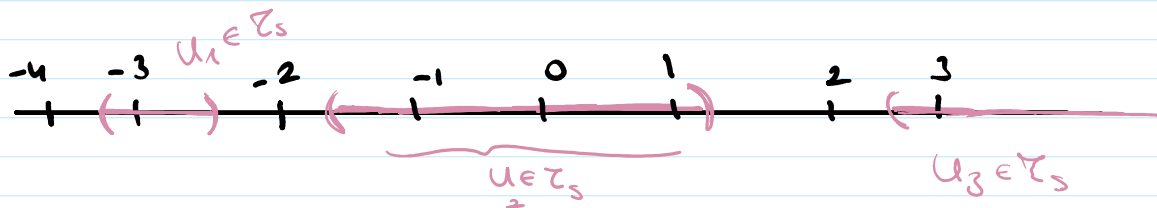
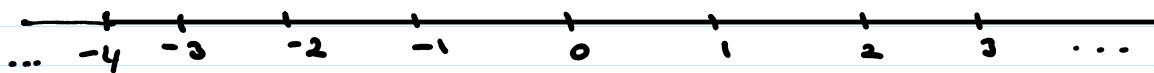
$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^n V_i &= \bigcap_{i=1}^n (U_i \cap A) = (U_1 \cap A) \cap \dots \cap (U_n \cap A) \\ &= \underbrace{(U_1 \cap \dots \cap U_n)}_{\in \tau} \cap A \in \tau_A. \quad \square \end{aligned}$$

ÖRNEK.  $(\mathbb{R}, \tau_s)$  ve  $A = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  alt kümesi verilmiş.



$$\left. \begin{array}{l} [0, a), \quad 0 < a < 1 \\ (b, c), \quad 0 < b < c < 1 \\ (d, 1], \quad 0 < d < 1 \\ [0, 1] \end{array} \right\} A = [0, 1] \text{ 'de ağıktır.}$$

ÖRNEK.  $(\mathbb{R}, \tau_s)$  'den  $\mathbb{Z}$  üzerine kalan alt uzay topolojisi =  $\mathbb{Z}$  'deki diskret topoloji



örneğin,  $U_1 \cap \mathbb{Z} = \{-3\} \in \tau_{\mathbb{Z}}$

$$U_2 \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0, 1\} \in \tau_{\mathbb{Z}}$$

$$U_3 \cap \mathbb{Z} = \{3, 4, 5, \dots\} \in \tau_{\mathbb{Z}}$$

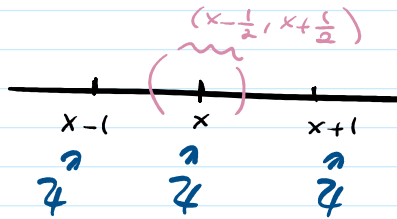
$$U_3 \cap \mathbb{Z} = \{3, 4, 5, \dots\} \in \tau_{\mathbb{Z}}$$

$$\underbrace{(0, 2.3) \cup (100, 102)}_{U_4 \text{ olsun}} \cap \mathbb{Z} = \{1, 2\} \cup \{101\} \in \tau_{\mathbb{Z}}$$

Bu iki topolojinin eşit old. ispatlayalım:

$x \in \mathbb{Z}$  olm.  $\forall z. \{x\} \subseteq \mathbb{Z}$  açıktır. Çünkü

$U \cap \mathbb{Z} = \{x\}$  ol.  $\exists U = (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}) \in \tau$  vardır.



bu örnekte  $\{x\}$ 'lerin

Topoloji tanımından,  $\{x\}$ 'lerin herhangi birleşimi de açıktır. Yani,  $\mathbb{Z}$ 'deki alt uzay topolojisinin elemanıdır.

⇓

Bu durumda  $\mathbb{Z}$ 'nin her alt kümesi  $\mathbb{Z}$ 'de açıktır. Bu da  $\mathbb{Z}$ 'deki diskret topolojiyi verir.

NOT:  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  alt kümesi verilsin.

"A'daki standart topoloji" deniliyorsa,  $(\mathbb{R}^n, \tau_s)$ 'den gelen  $A$  üzerindeki alt uzay topolojisi kastediliyordur.

Örneğin,  $A = [0, 1]$ 'deki standart topoloji ile kastedilen  $(\mathbb{R}, \tau_s)$  standart uzayından  $A$ 'ya kalmış alt uzay topolojisidir.

Tanım.  $X$  top. uz. ve  $A \subseteq X$  alt uzay topolojisi ile verilsin.

$K \subseteq A$  kapalıdır.  $:\Leftrightarrow K$  alt uzay topolojisinde kapalıdır.  
( $K, A$ 'da kapalıdır)

$K \subseteq A$  kapalıdır demek,  
 $A - K \subseteq A$ 'da açıktır demektir.

Alternatif ifade

Teorem.  $X$  top. uz. ve  $A \subseteq X$  alt uz. top. ile verilsin.

$K \subseteq A$  kapalıdır.  $\Leftrightarrow K = D \cap A$  ol. şek.

$\exists D \subseteq X$  kapalı vardır.

Teorem. (Alt uzay topolojisi için baz)

$X$  bir top uz. ve  $\mathcal{B}$ ,  $X$ 'in bir bazı olsun.

Eğer  $A \subseteq X$  ise

$\mathcal{B}_A = \{ B \cap A \mid B \in \mathcal{B} \}$ ,  $A$ 'daki alt uzay top. için

bir bazdır.

İspat. (Ödev)

ÖRNEK.  $S' \subset \mathbb{R}^2$  standart topoloji ile verilsin.

Açık 2-diskler  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{Z}_s)$  için bir baz oluşturduğundan

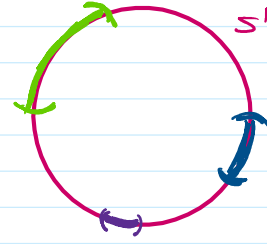
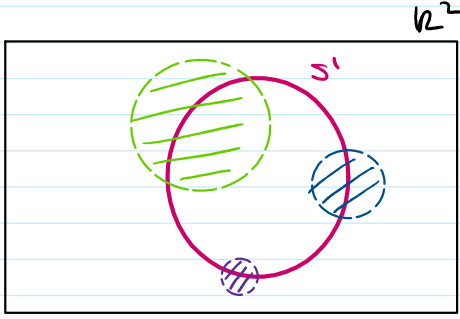
bu açık 2-disklerin  $S'$  ile kesişimi de  $S'$ 'deki alt

uzay topolojisi için bir baz oluşturur.

↑ hatırlatma: Bu alt uzay topolojisine,

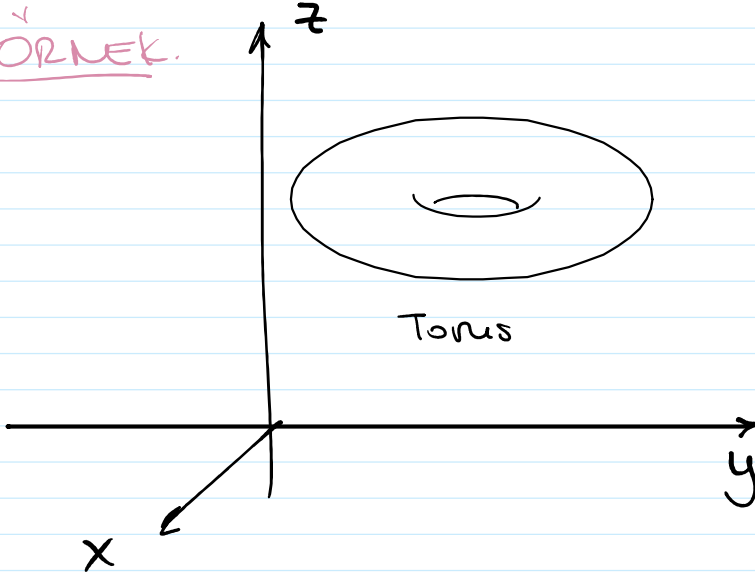
$S'$ 'deki standart topoloji denir.

$S'$ 'deki standart topoloji denir.



$S'$ 'deki standart topolojinin bazı elemanları.

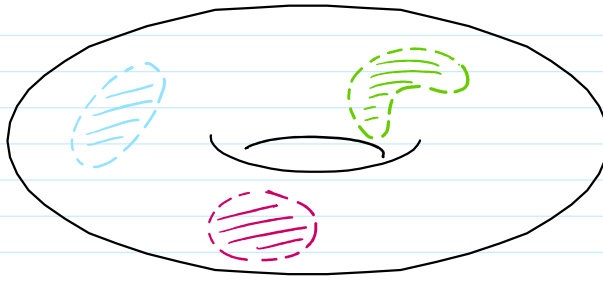
ÖRNEK.



$\mathbb{R}^3$ 'teki açık 3-diskler ile torusu kesiştirin.

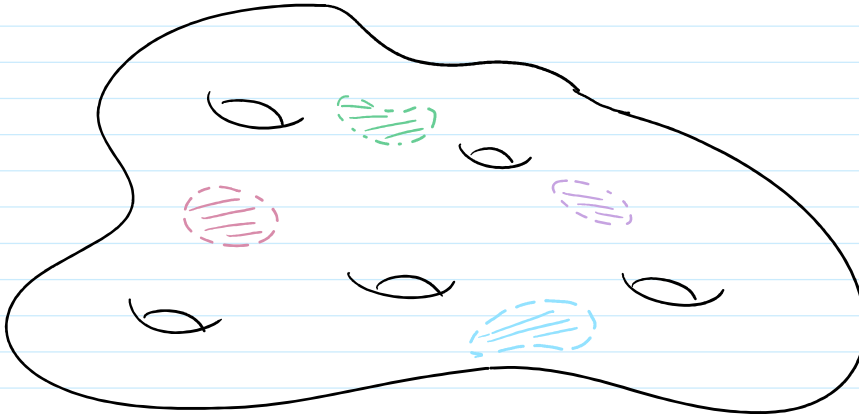
Böylece torus üzerinde verilen standart topolojinin bazıları elde edilir.





ÖRNEK.  $S$ ,  $n$ -cinsli yönlendirilebilir yüzey olsun.

(orientable surface of  $n$ -genus)



$S$ ,  $\mathbb{R}^3$ 'te yaşadığı için,

$S$  üzerinde verilen standart topolojinin bazıları

açık 3-diskler ile  $S$ 'yi kapatarak elde edilir.

Amaç.  $(X, \tau_x)$  ve  $(Y, \tau_y)$  topolojik uzaylar olmak üzere.

$X \times Y$  üzerinde, bu topolojik uzayları kullanarak doğal bir şekilde topoloji elde etmek.

Tanım.  $(X, \tau_x)$  ve  $(Y, \tau_y)$  top. uz. olsun.

$\mathcal{B} = \{ U \times V \mid U \in \tau_x, V \in \tau_y \}$  bazı ile verilen  $X \times Y$  üzerindeki topolojiye çarpım topolojisi denir.

Teorem. Yukarıdaki tanımda geçen  $\mathcal{B}$ ,  $X \times Y$ 'deki bir topoloji için gerçekten bir bazdır.

İspat: (Adams & Frazzosa / Theorem 3.7)

Soru: Çarpım topolojisi olarak

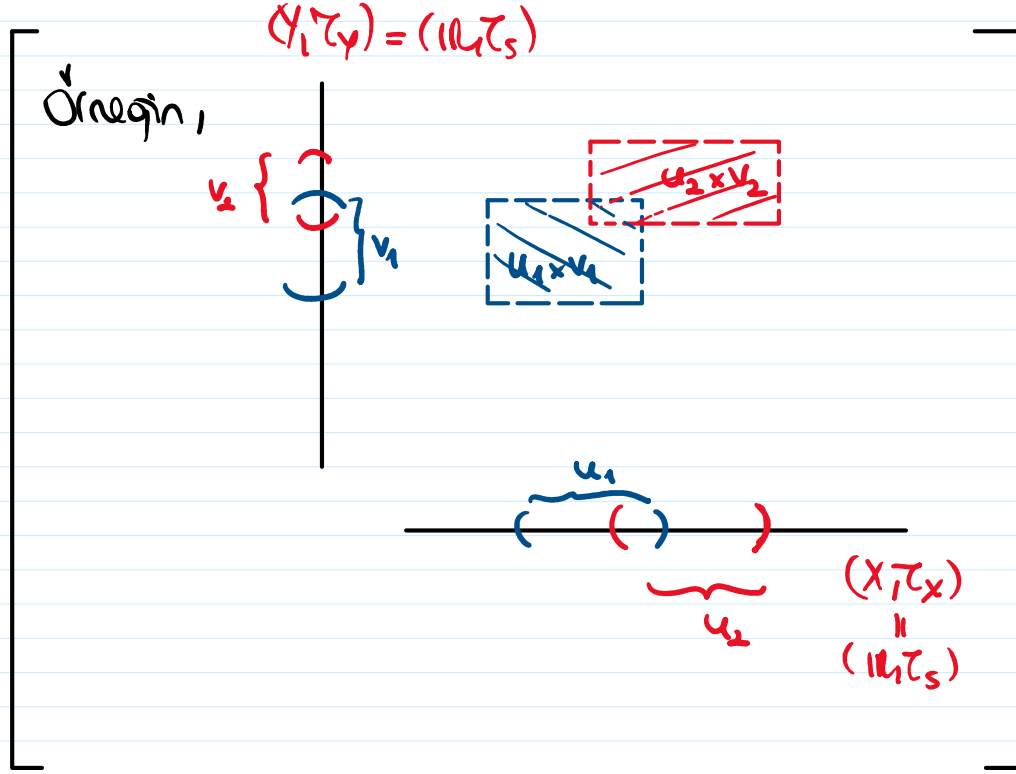
$\tau = \{ U \times V \mid U \in \tau_x, V \in \tau_y \}$ 'i alabilir miyiz?

Cevap: HAYIR! Çünkü  $\tau$  topoloji değildir.

↓  
NEDEN?

NEBEN:

Açık  $(U_1 \times V_1) \cup (U_2 \times V_2)$ ,  $U \times V$  formunda olmak zorunda değil.  $(\tau_2)$  sağlanmaz



ÖRNEK.  $X = \{a, b, c\}$ ,  $\tau_X = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b\}\}$  ve  $Y = \{1, 2\}$ ,  $\tau_Y = \{\emptyset, Y, \{1\}\}$  uzayları verilsin.

$X \times Y$  üzerindeki  $\tau_{X \times Y}$  çarpım topolojisinin bazıını kuralım.  $\{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$

$$\mathcal{B}_{X \times Y} = \{U \times V \mid U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}$$

$$= \{\emptyset, X \times Y, X \times \{1\}, \{a, b\} \times Y, \{a, b\} \times \{1\},$$

$$= \left\{ \emptyset, X \times Y, X \times \{1\}, \{a, b\} \times Y, \{a, b\} \times \{1\}, \right. \\ \left. \{b\} \times Y, \{b\} \times \{1\} \right\}$$

$$= \left\{ \emptyset, X \times Y, \{(a,1), (b,1), (c,1)\}, \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2)\}, \right. \\ \left. \{(a,1), (b,1)\}, \{(b,1), (b,2)\}, \{(b,1)\} \right\}$$

Not: Çarpım uzayı için  $\mathcal{B}$  bazının elemanları şoktur.

Çünkü  $X$ 'teki ve  $Y$ 'deki her açıkların çarpımlarını alıyoruz.

Soru: Aynı çarpım uzayını elde etmek için daha küçük bir baz bulabilir miyiz? (Bir başka deyişle, daha küçük bir baz bulalım ki aynı çarpım topolojisi olsun.)

Cevap: Aşağıdaki teoremdir.

Teorem 1:  $\mathcal{C}$  ve  $\mathcal{D}$  sırasıyla  $X$  ve  $Y$  uzayları için birer baz olsunlar. Bu durumda

$$\mathcal{E} = \{C \times D \mid C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}\}$$

$X \times Y$  üzerindeki çarpım topolojisini doğuran bir bazdır.

ÖRNEK.  $(\mathbb{R}, \tau_s)$  ve  $(\mathbb{R}, \tau_d)$  uzayları verilsin.  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  üzerinde

bu uzaylar ile oluşturulan çarpım topolojisi  $\tau$  ile gösterilsin. Bu durumda  $\tau$ 'yu doğuran bir baz

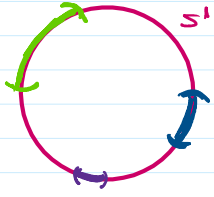
(Teorem 1'den dolayı) şu şekildedir:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{C \times D \mid C \in \mathcal{B}_s \text{ ve } D \in \mathcal{B}_d\} \\ &= \{(a,b) \times [c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}; a < b \text{ ve } c < d\} \end{aligned}$$

Ödev: Yukarıdaki örnekteki  $\tau$ 'yu oluşturan bir bazı, Teorem 1'i kullanmadan direkt "çarpım topolojisinin bazı" tanımını kullanarak yazmaya çalışın.

ÖRNEK.  $S' \times S'$  üzerindeki çarpım topolojisini doğuran  $\mathcal{B}$  bazını bulalım.

Hatırlatma:

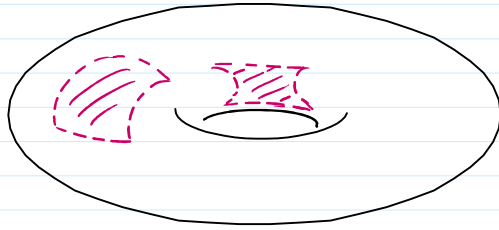


$S'$ 'teki bazı elemanları

Teoreu'1' den dolayı,  $S' \times S'$  üzerindeki çarpım topolojisinin bir bazı

$$\mathcal{B} = \{ C \times D \mid C, D \in \mathcal{B}_{S'} \} \text{ 'dir.}$$

Şekilsel olarak aşağıdaki gibi görünebilir.



$S' \times S'$

↑ torus da denir.

NOT:  $(X, \tau_X)$  ve  $(Y, \tau_Y)$  topolojik uzaylar olsun.

$A \subseteq X$  ve  $B \subseteq Y$  alt kümelerini alalım.

Bu durumda

(1)  $A \times B$ ,  $X \times Y$ 'nin alt uzayı (alt uzay top. ile) olarak genişletilir.

(2)  $A \times B$ , alt uzayların çarpımı (çarpım top. ile) olarak genişletilir.



(1) ve (2) ifadeleri denktir.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B} &= \{ (A \times B) \cap (U \times V) \mid U \in \mathcal{B}_X, V \in \mathcal{B}_Y \} \quad \leftarrow \text{alt uzay top. için baz} \\
 &= \{ \underbrace{(A \cap U)}_G \times \underbrace{(B \cap V)}_H \mid U \in \mathcal{B}_X, V \in \mathcal{B}_Y \} \\
 &= \{ G \times H \mid G \in \mathcal{B}_A, H \in \mathcal{B}_B \} \quad \leftarrow \text{çarpım top. için baz}
 \end{aligned}$$

Tanım.  $\forall i=1,2,\dots,n$  için  $(X_i, \mathcal{T}_i)$  top. uzay olsun.

Bu durumda  $X_1 \times \dots \times X_n$  üzerindeki top. uzayı doğrudan baz

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times \dots \times U_n \mid U_i \in \mathcal{T}_i, \forall i=1,\dots,n\} \text{ ile verilir.}$$

Teorem<sup>1</sup>'in benzeri  $X_1 \times \dots \times X_n$  çarpım uzayı için de geçerlidir:

Teorem<sup>2</sup>.  $\forall i=1,\dots,n$  için  $\mathcal{B}_i, X_i$  için bir baz olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{B} = \{B_1 \times \dots \times B_n \mid B_i \in \mathcal{B}_i, \forall i=1,2,\dots,n\},$$

$X_1 \times \dots \times X_n$  çarpım uzayı için bir bazdır.

ÖRNEK.  $T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n\text{-tane}}$  bir topolojik uzaydır.

$n$ -tane da denir.



Teorem<sup>3</sup>  $(X, \tau_X)$  ve  $(Y, \tau_Y)$  top. uz. olsun.

$A \subseteq X$  ve  $B \subseteq Y$  alt kümeleri olsun. Bu durumda

$$(a) \text{ int}(A \times B) = \text{int } A \times \text{int } B$$

$$(b) \text{ cl}(A \times B) = \text{cl } A \times \text{cl } B$$

sağlanır.

ÖRNEK.  $\mathbb{R}^2$  üzerindeki standart çarpım uzayı verilsin.

(Yani  $(\mathbb{R}, \tau_s)$  ve  $(\mathbb{R}, \tau_s)$  uzaylarının gelen çarpım uzayı)

(a)  $A = [0, 5) \times (3, 7) \subset \mathbb{R}^2$  için  $\text{int } A$  ve  $\text{cl } A$ 'yi bulunuz.

(b)  $B = [0, \infty) \times \{1, 5, 10\} \subset \mathbb{R}^2$  için  $\text{int } B$  ve  $\text{cl } B$ 'yi bulunuz.

$$(a) \text{ int } A = \text{int}([0, 5) \times (3, 7)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorem}^3}}{=} \text{int } [0, 5) \times \text{int } (3, 7) \\ = (0, 5) \times (3, 7)$$

$$\dots \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{Teorem}^3}}{\dots} \dots$$

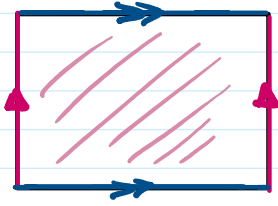
$$\begin{aligned} \text{cl } A &= \text{cl} \left( [0, 5) \times (3, 7) \right) \stackrel{\text{Teorem}^3}{=} \text{cl } [0, 5) \times \text{cl } (3, 7) \\ &= [0, 5] \times [3, 7] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) } \text{int } B &= \text{int} \left( [0, \infty) \times \{1, 5, 10\} \right) \stackrel{\text{Teorem}^3}{=} \text{int } [0, \infty) \times \text{int } \{1, 5, 10\} \\ &= (0, \infty) \times \emptyset = \emptyset \end{aligned}$$

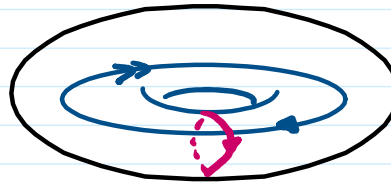
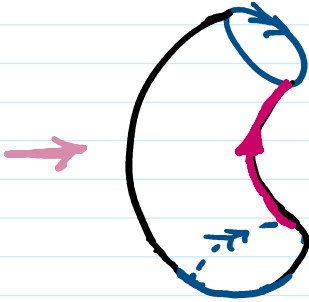
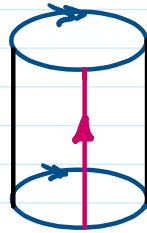
$$\begin{aligned} \text{cl } B &= \text{cl } [0, \infty) \times \text{cl } (\{1, 5, 10\}) = [0, \infty) \times \{1, 5, 10\}. \\ &\quad \quad \quad \swarrow \\ &\quad \quad \text{Teorem}^3 \end{aligned}$$

Amaç. "Çapırtırma" yaparak yeni topolojik uzay  
elke etmek.

Örneğin,



$[0,1] \times [0,1]$   
(Mevcut Uzay)



TORUS  
(Yeni Uzay)

Tanım.  $X$  bir topolojik uzay ve  $A$  bir küme olsun.

$p: X \rightarrow A$  örten dönüşümü alalım.

↑  $X$ 'in alt kümesi olm. zorunda DEĞİL.

$A'$ 'daki açıkları ( $A'$ 'daki topolojinin elemanlarını)

şu şekilde tanımlayalım:

$$U \subseteq A \text{ açıktır.} : \Leftrightarrow p^{-1}(U) \subseteq X \text{ açıktır.}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Bir başka deyişle,} \\ \tau = \{ U \subseteq A \mid p^{-1}(U) \subseteq X \text{ açıktır} \} \end{array} \right]$$

$A'$ 'nin açıklarının kümesine  $p$  ile üretilen bölüm topolojisi denir.

$A'$ 'ya bölüm uzayı denir.

$p$ 'ye bölüm dönüşümü denir.

SORU: Bölüm topolojisi gerçekten topoloji mi?

Cevap: Evet. Aşağıdaki teorem.

Teorem. Yukarıdaki biçimde verilen  $\mathcal{T}$  gerçekten topolojidir.

İspat.

(T1)  $\emptyset, A \in \mathcal{T}$  mu?

$p^{-1}(\emptyset) = \emptyset \subseteq X'$ 'te açık  $\xRightarrow{\text{tanımdan}} \emptyset \subseteq A$  açık

$p^{-1}(A) = X \subseteq X'$ 'te açık  $\xRightarrow{\text{tanımdan}} A \subseteq A$  açık  
 $\uparrow$   $\uparrow$   
 $p$  örten

(T2)  $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$   $X'$ 'nin açıkları olsun.

( $\Gamma$  : sonlu veya sonsuz indeks kümesi olm.  $\forall$ .)

$\Downarrow$

$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma \subseteq A$  açık mı?

$\forall \gamma \in \Gamma$  için  $U_\gamma \subseteq A$  açık ise tanımdan dolayı,

$p^{-1}(U_\gamma) \subseteq X$  açıktır.

$\left. \begin{array}{l} X \text{ bp uz. } \& \\ (T2) \text{ sağlar.} \end{array} \right\}$

...  $p^{-1}(U_r) \subseteq X$  ...  
(T2) sağlanır.

$$p^{-1}\left(\bigcup_{r \in I} U_r\right) = \bigcup_{r \in I} p^{-1}(U_r) \subseteq X \text{ açık.}$$

↓ kanımdan

$$\bigcup_{r \in I} U_r \subseteq A \text{ açık.}$$

(T3)  $U_1, \dots, U_n \subseteq A$  açık  $\Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_n \subseteq A$  açık mı?

$$p^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n U_i\right) = \bigcap_{i=1}^n p^{-1}(U_i) \subseteq X \text{ açık.}$$

↑  
 $\forall i$  için  $p^{-1}(U_i) \subseteq X$ 'te açık (çünkü  $U_i \subseteq A$  açık)

&

$X$  top. uzayında (T3) sağlanır.

Böylece kanımdan  $\bigcap_{i=1}^n U_i \subseteq A$  açıktır.  $\square$

ÖRNEK.  $(\mathbb{R}, \tau_s)$  verilsin.  $A = \{a, b, c\}$  kümesini alalım.

$$p: \mathbb{R} \rightarrow A$$

$$x \mapsto p(x) = \begin{cases} a & , x < 0 \\ b & , x = 0 \\ c & , x > 0 \end{cases}$$

örter dñşümñ veilsin. A şaında p ile çetilen  
bölüm topolojisini yazınız.

Bu topolojiye  $\mathcal{T}$  adını verelim. Bulmak istediğimiz:

$$\mathcal{C} = \{ U \subseteq A \mid p^{-1}(U) \subseteq X \text{ again} \}.$$

$$\bar{p}^{-1}(\{a\}) = (-\omega, 0) \in \tau_j \Rightarrow \{a\} \in \tau.$$

$$p'(\{b\}) = \{0\} \notin \mathcal{T}_S \Rightarrow \{b\} \notin \mathcal{C}.$$

$$\vec{p}(\{c\}) = (0, \infty) \in \mathcal{T}_S \Rightarrow \{c\} \in \mathcal{T}.$$

$$p^-(\{a, b\}) = (-\infty, 0] \notin \tau_S \Rightarrow \{a, b\} \notin \tau.$$

$$p^{-1}(\{a, c\}) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \in \tau_S \Rightarrow \{a, c\} \in \tau.$$

$$p^{-1}(\{b, c\}) = [0, \infty) \notin \tau_S \Rightarrow \{b, c\} \notin \tau.$$

$$P^{-1}(A) = \{R \in \mathcal{T}_S \mid A \in \mathcal{T}\}.$$

1  
P ö r t e n

$$\varphi^{-1}(\phi) = \phi \in \tau_S \Rightarrow \phi \in \tau.$$

By place  $\tau = \{A, \phi, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$

Şimdi "herhangi"  $A$  kümesi yerine, özel bir  $A$  kümesi seçeceğiz. Bu özel kümenin adına  $X^*$  diyeceğiz.



$X$  topolojik uzay olsun.

$X^* := \underline{X'}$  in ayrık altkümelerinin, birleşimi  $X'$  i  
veren bir toksiyon olsun.

→  $X^*$  'a  $X$  'in bir  
parçaları (partition) dır.

Herhangi 2 alt kümesi alırsa  
alınır, ayrık olacak.  
(mutually disjoint)

$p: X \rightarrow X^*$

$x \mapsto X^*$  'da  $x$  'i içeren küme

şeklinde tanımlanan örten bir  $p$  dönüşümü  
alalım.

Bu durumda  $p$ ,  $X^*$  üzerinde koşım topolojisi  
üzeri.



ÖRNEK.  $X = \{a, b, c, d, e\}$  ve

$\tau_X = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}\}$  verilsin.

$X^* = \{\overset{=A}{\{a, b\}}, \overset{=B}{\{c, d, e\}}\}$ ,  $X'$  in bir parçalanması olsun.

Yukarıdaki  $p$  kurumuna göre,

|                            |                                       |
|----------------------------|---------------------------------------|
| $p: X \longrightarrow X^*$ | şeklinde tanımlanan $p$ bir           |
| $a \mapsto A$              | dönüşümüdür. $p$ ile verilen          |
| $b \mapsto A$              |                                       |
| $c \mapsto B$              | herhangi bir topoloji $\tau$ yazalım. |
| $d \mapsto B$              |                                       |
| $e \mapsto B$              |                                       |

Bulmak isterken:  $\tau = \{U \subseteq X^* \mid p^{-1}(U) \subseteq X \text{ açıktır}\}$ .

- $p^{-1}(\{A\}) = \{a, b\} \in \tau_X \Rightarrow \{A\} \in \tau$ .
- $p^{-1}(\{B\}) = \{c, d, e\} \notin \tau_X \Rightarrow \{B\} \notin \tau$ .
- $p^{-1}(\{A, B\}) = \{a, b, c, d, e\} \in \tau_X \Rightarrow \{A, B\} \in \tau$ .
- $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_X \Rightarrow \emptyset \in \tau$ .

Böylece  $\tau = \{X^*, \emptyset, \{A\}\}$  bulunur.

NOT: Bu örnekte olduğu gibi

$(X, \tau_X)$ 'ten  $(X^*, \tau_{\text{toplem}})$ 'e gitme prosedürünü

"parçalanıştaki  $S$  kümelerini alıp,  $S$ 'nin tüm elemanlarını birbiri ile eşleme" gibi düşünebiliriz.

Bir başka deyişle,  $S$ 'yi tek bir noktaya çekirme gibi düşünebiliriz.

Denklik bağıntısı kullanılarak da özel bir bölüm üyesi tanımlanabilir. Bu konuda bundan bahsedeceğiz.

Teorem.  $X^*$ ,  $X$ 'in bir parçalanışı olsun ve  $X$  üzerinde  $\sim$  bağıntısı şu şekilde tanımlansın:

$$x \sim y : \Leftrightarrow \{x, y\} \in A, \quad \exists A \subseteq X^* \text{ için.}$$

Bu durumda  $\sim$  denklik bağıntısıdır.

İspat. (Ödev)

- $X$  üzerindeki bir denklik bağıntısı için,  $x \in X$  olm.  $\mathcal{A}$ .  $[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}$  denklik sınıflarını alalım. Bu durumda  $X^* = \{[x] \mid x \in X\}$ ,  $X$ 'in bir parçalanışudur.

Teorem.  $\sim$ ,  $X$  üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Yukarıdaki teorende verilen  $X^*$  parçalanışı aslında bir bölüm uzayı verir (Not'a bakınız). Bu bölüm uzayı genelde  $X/\sim$  ile gösterilir.

• Bununla itibaren  $I = [0,1]$  ile gösterilecektir.

ÖRNEK.  $X = I$  uz. verilsin.  $X$  üzerinde  $\sim$  şu şekilde verilsin:

- $0 \sim 1$
- $\forall x \in (0,1)$  için  $x \sim x$ .

Kahaca, sadece  $0, 1$ 'e denk kılınmış,  
diğer noktalar ise olduğu gibi bırakılmıştır.

Bu durumda  $I/\sim = S^1$  uzayını verir.

(daha detaylıca  
 $S^1 = I / 0 \sim 1$  ile

...

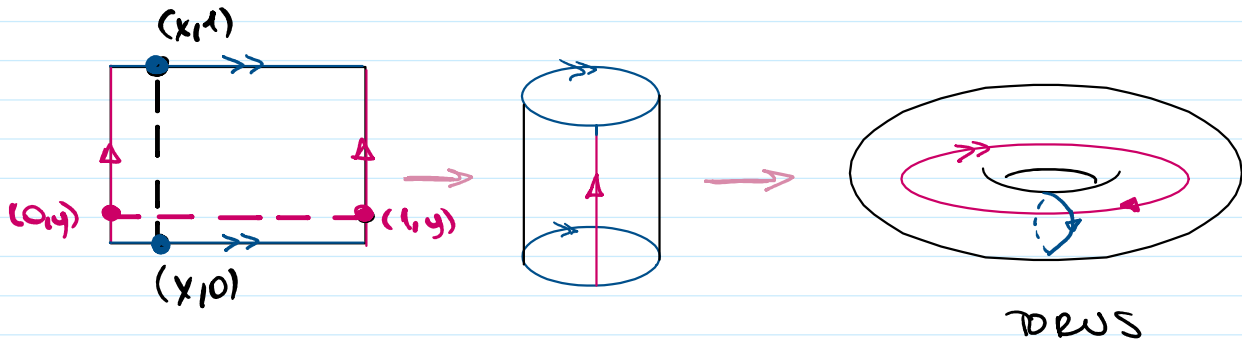
$\mathcal{O}' = \pm 10 \sim 1$  ile  
de gösterilir.

ÖRNEK.  $X = I \times I$  uzayı verilsin. Bu uzayda  
 $\sim$  şu şekilde verilsin:

- $(x, 0) \sim (x, 1)$  &  $(0, y) \sim (1, y)$ .
- Diğer noktalar ise olduğu gibi bırakılsın.

Bu sebeple bu tür  
noktaları belirtmeyeceğiz.  
Sadece kardisinden başka  
noktalara denk kullınolar  
belirtilecektir.

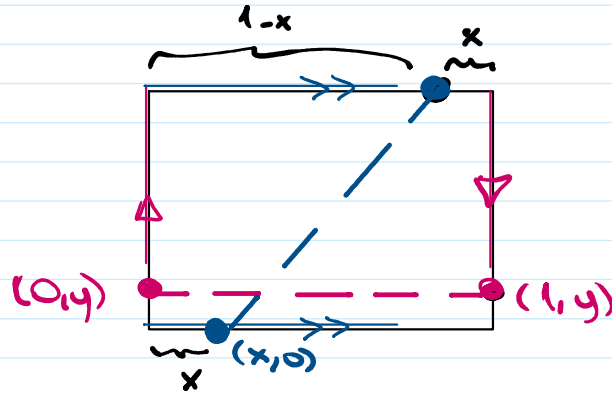
Böylece  $I/\sim = T \cup S$  elde edilir.



ÖRNEK.  $I \times I$  üzerinde  $\sim$  şu şekilde  
verilsin:

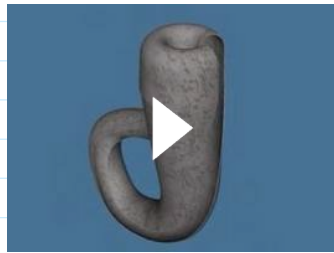
veilsin:

$$(x, 0) \sim (1-x, 1) \quad \& \quad (0, y) \sim (1, y)$$



Böylece  $I \times I / \sim = \text{Klein Sisesi}$  elde edilir.

The Klein Bottle

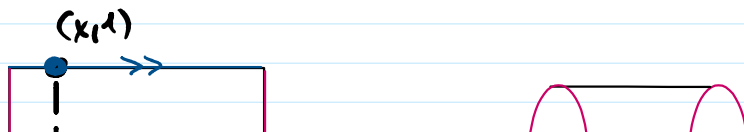


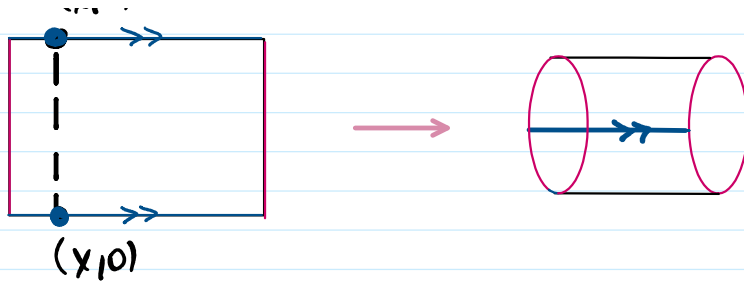
<https://www.youtube.com/watch?v=E8rifKlq5hc&t=83s>

ÖRNEK.  $I \times I$  üzerinde  $\sim$  şu şekilde veilsin:

$$(x, 0) \sim (x, 1).$$

Böylece  $I \times I / \sim = \text{Silindir}$  elde edilir.





ÖRNEK: Möbius Seridi =  $I \times I / (x, 0) \sim (1-x, 1)$ .

Hatırlatma.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli dir.  $\Leftrightarrow$   $\forall x_0 \in D(f)$  için,  
 $\forall \varepsilon > 0$  için  $\exists \delta > 0$  vardır ki  
 $|x - x_0| < \delta$  sağlayan her  $x$  için  
 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  olur.

Bu fikri  
 topolojik uzaylara  
 genelleştirelim.

Tanım.  $X$  ve  $Y$  topolojik uzaylar olsun.

$f: X \rightarrow Y$  sürekli dir.  $\Leftrightarrow \forall x \in X$  için,  
 $f(x)$ 'i içeren her  $V \subseteq Y$  açığı için  
 $\exists U \in \mathcal{U}(x)$  vardır ki  $f(U) \subseteq V$  olur.

Eğer  $X$  ve  $Y$  uzayları  $(\mathbb{R}, \tau_s)$  olarak alınırsa,  
 yukarıdaki tanım Analiz'deki  $\varepsilon$ - $\delta$  tanımına rahatlıkla  
 çevrilir. Gözlemleyiniz.

Aşağıdaki teorem, sürekliliğin alternatif tanımıdır (yuka-



Aşağıdaki teorem, sürekliliğin alternatif kavimidir (yukarıdaki tanıma denktir).

Teorem.  $(X, \tau_X)$  ve  $(Y, \tau_Y)$  top. uz. olsun.

$f: (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$   $\Leftrightarrow \forall U \in \tau_Y$  için  $f^{-1}(U) \in \tau_X$ .  
Süreklidir.

$\Leftrightarrow \forall K \in \mathcal{K}_Y$  için  $f^{-1}(K) \in \mathcal{K}_X$ .

ÖRNEK.  $X = \{a, b, c, d\}$ ,  $\tau_X = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{c\}, \{c, d\}\}$   
ve  $Y = \{1, 2, 3\}$ ,  $\tau_Y = \{Y, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$  olsun.

(a)  $f: (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$  dönüşümü süreklidir. Gösteriniz.

$a \mapsto 1$   
 $b \mapsto 1$   
 $c \mapsto 2$   
 $d \mapsto 2$

(b)  $g: (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$  sürekli değildir. Gösteriniz.

$a \mapsto 1$   
 $b \mapsto 2$   
 $c \mapsto 2$   
 $d \mapsto 3$

ÖRNEK.  $X$  ve  $Y$  top. uzaylar olsun.

- $\text{id}: X \rightarrow X$  **birim dönüşümü** sürekli. Çünkü  
 $x \mapsto x$

$\forall U \subseteq X$  açık için  $\text{id}^{-1}(U) = U \subseteq X$  açıktır.

↓  
Değer kümesi

↑  
Tanım kümesi

Dikkat:  $\text{id}: X \rightarrow X$  ile kastedilen, aslında  $\text{id}: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$   
 $x \mapsto x$   $x \mapsto x$

dönüşümüdür.

$f: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau')$  dönüşümü sürekli olmak

$x \mapsto x$

zanda değildir. (Böyle bir  $f$  yazınız - ödev)

- $c: X \rightarrow Y$  sabit dönüşümü sürekli. Çünkü  
 $x \mapsto y_0$

$U \subseteq Y$  açık kümesini alalım.  $c^{-1}(U) = \begin{cases} X, & y_0 \in U \\ \emptyset, & y_0 \notin U \end{cases}$   
 $\in \tau_x$   
 $\in \tau_x$

NOT: Sürrekliliği inceleyen sadece  $f$ 'in formülü,  $D(f)$  ve  $f$ 'in değer kümesi önemli değil;  $D(f)$  ve  $f$ 'in değer kümesi üzerindeki topolojiler de önemli.

Örnek.

(a)  $f: (\mathbb{R}, \tau_s) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{fc})$  sürrekli old. gösterelim.

$$x \mapsto \frac{x-1}{2}$$

$(\mathbb{R}, \tau_{fc})$ 'deki k'm açıklar bu formda

$$U = \mathbb{R} - \{x_1, \dots, x_m\} \in \tau_{fc} \text{ alalım.}$$

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(\mathbb{R} - \{x_1, \dots, x_m\})$$

$$= f^{-1}(\mathbb{R}) - f^{-1}(\{x_1, \dots, x_m\})$$

$$f^{-1}(A-B)$$

"

$$= \mathbb{R} - \{2x_1+1, \dots, 2x_m+1\}$$

$$f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$$

$$= (-\infty, 2x_1+1) \cup (2x_1+1, 2x_2+1) \cup \dots \cup (2x_m+1, \infty)$$



$f$  sürreklidir.  $\square$

$\tau_s$

(b)  $g: (\mathbb{R}, \tau_s) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_e)$  sürrekli olmadığını gösterelim.

$$x \mapsto \frac{x-1}{2}$$

$[0, 1) \in \tau_t$  alalım.  $g^{-1}([0, 1)) = [1, 3) \notin \tau_s$ .

↓  
g sürekli değildir.  $\square$

Teorem 1.  $f: (X, \tau_x) \rightarrow (Y, \tau_y)$  sürekli dir.



$\forall B \in \underline{\mathcal{B}}_y$  için  $f^{-1}(B) \in \underline{\mathcal{C}}_x$  dir.

Teorem 1'in avantajı: Bazı elemanlarını aldığımızı için  $Y$ 'deki kim açıklara bakmak zorunda değiliz.

ÖRNEK.  $f: (\mathbb{R}, \tau_s) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_s)$  dönüşümü sürekli midir?

$$x \mapsto 2x$$

$U = (a, b) \in \mathcal{B}_s$  alalım.

$$f^{-1}(U) = f^{-1}((a, b)) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \in \tau_s \text{ bulunur.}$$



f sürekli dir.  $\square$

$\forall$

$f$  sürekli.  $\square$

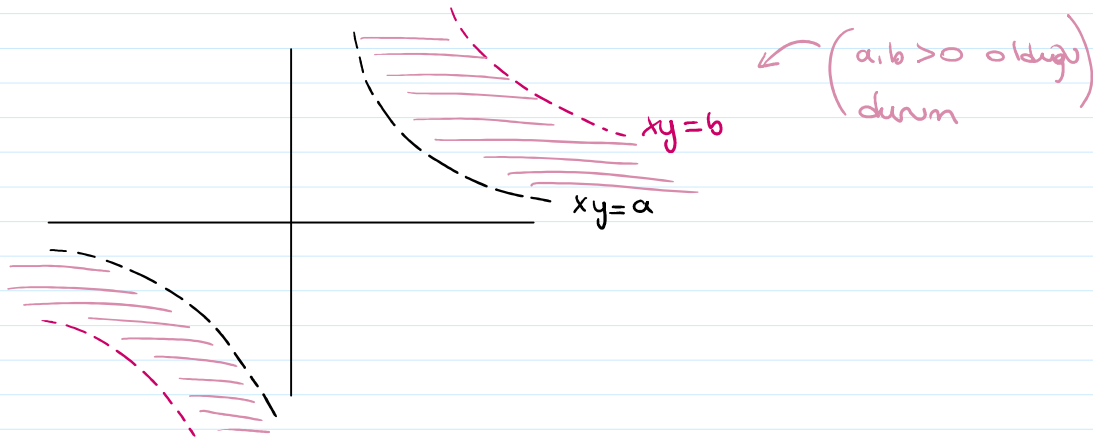
ÖRNEK. Çarpım sürekli bir dönüşümdür. Bir başka

ifadeyle,  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli dir.  
 $(x, y) \mapsto xy$

(Burada,  $\mathbb{R}$  ve  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  üzerinde standart topolojiler verilmiştir.)

$U = (a, b) \in \mathcal{B}_S$  alalım.

$$f^{-1}(U) = f^{-1}((a, b)) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < xy < b \}$$



Şekilde  $f^{-1}((a, b))$  çizilmiştir ve  $f^{-1}((a, b)) \subseteq \mathbb{R}^2$  açık olduğu görülmektedir.

Teorem<sup>2</sup>.  $f: (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$  ve  $g: (Y, \tau_Y) \rightarrow (Z, \tau_Z)$

Teorem.  $f: (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$  ve  $g: (Y, \tau_Y) \rightarrow (Z, \tau_Z)$

sürekli dönüşümler olsun. Bu durumda

$g \circ f: (X, \tau_X) \rightarrow (Z, \tau_Z)$  de sürekli dir.

İspat. Amaç.  $U \subseteq Z$  açık için  $(g \circ f)^{-1}(U) \subseteq X$  açık  
old. göstermek.

$U \subseteq Z$  açık  $\xrightarrow[g \text{ sür.}]{}$   $g^{-1}(U) \subseteq Y$  açık

$\xRightarrow[f \text{ sür.}]{}$   $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U) \subseteq X$  açık.  $\square$

Teorem.  $f: X \rightarrow Y$  ve  $g: X \rightarrow Z$  sürekli dir.

$\Downarrow$

$h: X \rightarrow Y \times Z$  sürekli dir.

ÖRNEK:  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  sürekli dir.  
 $x \mapsto (x^2, x^3)$

Aynı  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli dir.  
 $x \mapsto x^2$   $x \mapsto x^3$

ÖRNEK:  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$

ÖRNEK:  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$   
 $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

dönüşümü sürekli. Çünkü

$$\begin{array}{ll} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & \text{ve} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{sürekli.} \\ t \mapsto \cos 2\pi t & t \mapsto \sin 2\pi t \end{array}$$

Teorem. Bütün dönüşümü  $p: X \rightarrow A$  sürekli.

Tanım.  $f: (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$  açık dönüşümdür.



$\forall U \in \tau_X$  için  $f(U) \in \tau_Y$  olur.

Tanım.  $f: (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$  kapalı dönüşümdür.



$\forall K \in \tau_X$  için  $f(K) \in \tau_Y$  olur.

NOT: Sürekli dönüşüm, açık dönüşüm olmak zorunda değildir!



ÖRNEK.  $f: (\mathbb{R}, \tau_s) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_s)$  sürekli (ödev)  
 $x \mapsto x^2$

fakat  $f$  açık değildir. Çünkü:

$U = (-1, 1) \in \tau_s$  alalım.  $f(U) = f((-1, 1)) = [0, 1) \notin \tau_s$ .

ÖRNEK.  $X = [0, 1] \cup [2, 3]$  ve  $Y = [0, 2]$  uzayları verilsin.

$f: X \rightarrow Y$

$$x \mapsto \begin{cases} x & , \quad x \in [0, 1] \\ x-1 & , \quad x \in [2, 3] \end{cases}$$

dönüşüm verilsin.  $f$  açık dönüşüm değildir fakat  
sürekli dir. Gösteriniz.

(ödev)

$U = [2, 3] \subseteq X$  açık alalım.

$f(U) = f([2, 3]) = [1, 2] \subseteq Y$  açık değildir.

$\Downarrow$

$f$  açık dñ. değildir.

ÖRNEK.  $\pi_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  1. bileşene izdüşüm dönüşüm  
verilsin.  $\pi_1$  kapalı dönüşüm değildir. Gösteriniz.

$K = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy = 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  kapalı için

$\pi_1(K) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$  kapalı değildir.

$\Downarrow$

$f$  kapalı değildir.

Pasting Lemma.  $X$  bir top. uz. olsun.  $A, B \subseteq X$  ve

$X = A \cup B$  olsun.

$f: A \rightarrow Y$  ve  $g: B \rightarrow Y$  sürekli ise

$\&$

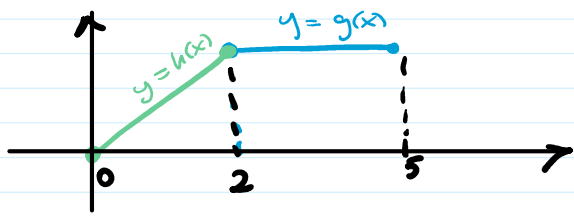
$\forall x \in A \cap B$  için  $f(x) = g(x)$  oluyorsa

$\Downarrow$

$h: X \rightarrow Y$

$x \mapsto h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in B \end{cases}$  sürekli'dir.

## Pasting Lemma'nın Motivasyonu



Grafiki verilen parçale fonksiyonu  
şu şekilde yazabiliriz:

$$f(x) = \begin{cases} h(x), & 0 \leq x < 2 \\ g(x), & 2 \leq x \leq 5 \end{cases} \quad \text{VEYA} \quad f(x) = \begin{cases} h(x), & 0 \leq x \leq 2 \\ g(x), & 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

$$\text{VEYA} \quad f(x) = \begin{cases} h(x), & 0 \leq x \leq 2 \\ g(x), & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Diğer kısımları grafikleri şu şekilde yazabiliriz:

Eğer  $h(2) \neq g(2)$  olsaydı,  $f$ ,  $x=2$ 'de sürekli  
olmazdı (aslında fonksiyon bile olmazdı). Sürekli-  
lik için  $h(2) = g(2)$  olmalı.

→ Pasting Lemma bu durumun genelleştirilmesidir.

ÖRNEK.  $\mathbb{R}$  üzerinde standart topoloji alınsın.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad x \geq 2 \\ \frac{3x}{2} & , \quad x \leq 2 \end{cases}$$

fonksiyonu sürekli midir? Pasting Lemma'yı kullanarak açıklayınız.

$$f(x) = \begin{cases} \overset{= g(x)}{x+1} & , \quad x \geq 2 \\ \underset{= h(x)}{\frac{3x}{2}} & , \quad x \leq 2 \end{cases}$$

1. Adım:  $g: [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli. (ödev)  
 $x \mapsto x+1$

↑  
Not:  $[2, \infty)$  üzerindeki  
 standart topoloji,  $\mathbb{R}$ 'den  
 gelen alt uzay topolojisidir.

2. Adım:  $h: (-\infty, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli. (ödev)  
 $x \mapsto 3x/2$

3. Adım:  $\forall x \in (-\infty, 2] \cap [2, \infty) = \{2\}$  için

$g(2) = 3 = h(2)$ ' dir.

Sonuç olarak Pasting lemma'dan dolayı,  $f$  sürekli.

Önerme.  $f: (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$  sürekli dönüşüm olsun.

- $A \subseteq X$  olsun.  $f|_A: A \rightarrow Y$   
 $a \mapsto f|_A(a) = f(a)$

kısıtlanmış dönüşüm sürekli.  
(restriction map)

- $f: X \rightarrow f(X) \subseteq Y$  sürekli.

İspat. (Ödev)

Önerme.  $X$  bir top. uzay ve  $A \subseteq X$  olsun. Bu durumda

- $i: A \hookrightarrow X$  inclusion dönüşümü sürekli.  
 $a \mapsto a$

İspat. (Ödev)

NOT:  $p: E \rightarrow B$  örten, sürekli ve ya açık ya da kapalı dönüşüm ise  $p$  bölün dönüşümdür.

- Fakat bir bölün dönüşüm "ne açık ne de kapalı" olabilir.

ÖRNEK:  $\pi_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  1. bileşene projeksiyon dönüşümünü alalım.

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{ya } x \geq 0 \text{ ya da } y = 0 \\ \text{ya da ikisi de} \end{array} \right\} \text{ olsun.}$$

$\pi_1|_A: A \rightarrow \mathbb{R}$  kısıtlanmış dönüşüm bölün dönüşümdür. (Ödev)

Ancak  $\pi_1|_A$  ne açık ne de kapalıdır. (Ödev)

Tanım.  $(X, \tau)$  topolojik uzay olsun.

$\{x_n\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ ,  $X$ 'te bir dizi ve  $x \in X$  olsun.

$\{x_n\}$ ,  $x$ 'e yakınsar derir.  $:\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}(x)$  için

$\exists N \in \mathbb{Z}^+$  vardır ki

$\forall n, n \geq N$  için  $x_n \in U$ .

$x_n \rightarrow x$  ve ya  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  ile gösterilir.

ÖRNEK.  $X = \{a, b, c\}$ ,  $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$  verilsin.

$$x_n = \{a, c, a, c, \dots\} = \begin{cases} a & , n \text{ tek} \\ c & , n \text{ çift} \end{cases}$$

Bu durumda  $x_n \not\rightarrow a$  olduğunu gösteriniz.

$\forall U \in \mathcal{U}(a)$  için  $\exists N \in \mathbb{Z}^+$  var mıdır ki  $\forall n, n \geq N$  için  $x_n \in U$  olur?

- $U = X$  alalım.  $N = 1$  için  $x_1 = a \in U$

- $U = X$  alalım.  $N = 1$  için  $x_1 = a \in U$   
 $x_2 = c \in U$   
 $x_3 = a \in U$   
 $\dots$

- $U = \{a\}$  alalım.  $N'$ 'yi ne alırsak alalım,  
 $x_n = \begin{cases} a, & n \text{ tek} \\ c, & n \text{ çift} \end{cases}$  olduğundan  $x_2 = x_4 = \dots \notin \overset{\{a\}}{U}$  olur.

$\Downarrow$   
 Sırtı sağlanmayan en az bir  $U$  bulduk.

$\Downarrow$   
 $x_n \not\rightarrow a$ .

ÖRNEK. Yukarıdaki örnekte,  $x_n$  dizisi yakınsaktır.

Hatta  $x_n \rightarrow x'$  dir. Gösteriniz.

Göstermek istediğin:  $\forall U \in \mathcal{U}(c)$  için  $\exists N \in \mathbb{Z}^+$  var mıdır ki  
 $\forall n, n \geq N$  için  $x_n \in U$  olur.

Burada  $c$ 'yi içeren tek açık  $X'$ 'tir. O zaman

$U = X \in \mathcal{U}(c)$  için bakılırsa,  $\exists N = 1 \in \mathbb{Z}^+$  için

$\forall n, n \geq 1 \stackrel{N}{=} \text{ için } x_n \in U = X$  bulunur.



$\forall n, n \geq 1$  için  $x_n \in U = X$  bulunur.

Aslında  $N$ 'yi istediğimiz herhangi pozitif tamsayı seçebiliriz.

ÖRNEK.  $(\mathbb{R}, \tau_e)$ 'de  $x_n = \frac{-1}{n} \not\rightarrow 0$  old. gösteriniz.

$\forall U \in \mathcal{U}(0)$  için  $\exists N \in \mathbb{Z}^+$  var mıdır ki  $\forall n, n \geq N$  için  $x_n \in U$  olur?

$U = [0, 1) \in \mathcal{U}(0)$  alalım.  $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ 'in terimleri sırasıyla pozitif-negatif olarak devam eder. Böylece "negatif terimler"  $\notin [0, 1)$  olduğundan

$\frac{(-1)^n}{n} \not\rightarrow 0$  bulunur.

NOT:  $(X, \tau)$  topolojik uzayında bir dizinin limiti tek olmak zorunda değildir!



Aşağıdaki uzay ve dizi buna bir örnektir.

ÖRNEK.  $X = \{a, b, c\}$  üzerinde indiscret topolojiyi alalım.

$$x_n = \begin{cases} a, & n \text{ tek} \\ c, & n \text{ çift} \end{cases} \quad \text{dizisini alalım.}$$

- $x_n \rightarrow a$  'dır. Çünkü  $\forall U \in \mathcal{U}(a)$  için (ki sadece  $U = X$  olmak zorunda),  $x_n$ 'in tüm terimleri  $U$ 'dadır.
- Benzer şekilde  $x_n \rightarrow b$  ve  $x_n \rightarrow c$  olduğu da gösterilir.

SORU: Hangi şartlar altında limit tek olur?

Cevap: Aşağıdaki teorem.

Teorem.  $(X, \tau)$  Hausdorff ise yakınsak bir dizinin limiti tek tir.

İspat. Ödev.

Tanım.  $X$  ve  $Y$  top. uz. ve  $x \in X$  olsun.

$f: X \rightarrow Y$  dönüşümü verilsin.

$f$ ,  $x$  noktasında  $\Leftrightarrow x$ 'e yakınsayan her  $\{x_n\}$  dizisi  
dizisel sürekli dir için  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ ' dir.  
denir.

Teorem.  $f: X \rightarrow Y$  sürekli olsun.  $X$  uzayındaki  
 $x_n$  dizisi  $x$ 'e yakınsar ise  $Y$ 'deki  $f(x_n)$  de  $f(x)$ 'e  
yakınsar.

NOT: Bu teoremin tersi doğru değildir.

ÖRNEK.  $\tau_{st} = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X \mid U^c \text{ sayılabilir}\}$  olm. uz.  
(sayılabilir kümeler topolojisi)

$(\mathbb{R}, \tau_{st})$  ve  $(\mathbb{R}, \tau_s)$  standart uzayı alalım.

$f: (\mathbb{R}, \tau_{st}) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_s)$  dönüşümünü alalım.

$$x \mapsto x$$

•  $f$  sürekli değildir.

• Fakat  $f$  dizisel sürekli.

} Gösterelim.

-  $f$  sürekli değildir. Çünkü  $(0,1) \in \mathcal{T}_S$  iken  
 $f^{-1}((0,1)) \notin \mathcal{T}_{st}$ .

-  $f$  dizisel sürekliktir :

$\{x_n\} \rightarrow x$  dizisini alalım.

$\{x_n\} \rightarrow x$  olduğundan,

$\forall U \in \mathcal{U}(x)$  için  $\exists N \in \mathbb{Z}^+$  vardır ki  $\forall n, n \geq N$  için  
 $x_n \in U$  olur.

$A := x_n$ 'in  $x$ 'ten farklı tüm terimlerinin kümesi olsun.

$\Downarrow$   
 $A$  sayılabilir ve  $x \notin A$ .

$\Downarrow$   $x \in A^c$ .  
 $A = (A^c)^c = \mathbb{R} - A^c$  sayılabilir.

$\Downarrow$   
 $A^c \in \mathcal{T}_{st}$  &  $x \in A^c$ .

Böylece  $U := A^c \in \mathcal{U}(x)$  seçebiliriz.

$A$ 'nın kaniından dolayı,  $A^c$ 'nin içinde  $x_n$ 'in  
( $x$ 'ten farklı) hiç terimi yok. Bu durumda,

$x_n \rightarrow x$  olduğu için  $\exists N \in \mathbb{Z}^+$  vardır ki  $\forall n, n \geq N$   
için  $x_n \in U = A^c$  olur. Fakat "kaniunla" gelişmemesi için  
bir  $x_N$  teriminden sonraki tüm terimler  $x$   
olmalı.

Böylece  $x_n = \{x_1, x_2, \dots, x_N, x, x, \dots\}$  olmalı.

$$f(x_n) = \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N), f(x), f(x), \dots\}$$
$$= \{x_1, x_2, \dots, x_N, x, x, \dots\}$$

$f$  dön.

Bu durumda  $f(x_n) \rightarrow x (= f(x))$  elde edilir.

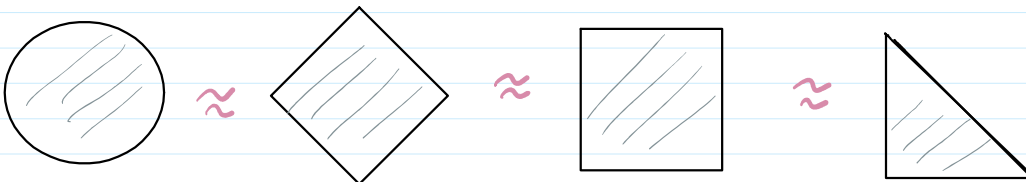
İki topolojik uzayın denk olmasına, başka bir deyişle, topolojik olarak aynı olmasına "homeomorfizma" denir.

$X$  ve  $Y$ 'nin homeomorf olması için en az bir tane  $f: X \rightarrow Y$  homeomorfizma olması gerekir.

Diğer taraftan, "topolojik olarak aynı" olması kaba tabiriyle şu şekilde açıklanabilir:

$X$  ve  $Y$  uzaylarının kauçuktan yapılmış olduğunu varsayalım.  $X$  uzayını eğip-bükerek,  $X$ 'e parça ekleneden ve  $X$ 'ten parça koparmadan  $Y$ 'yi elde edebiliyorsak,  $X$  ve  $Y$ 'ye topolojik olarak aynı (homeomorf) uzaylar denir.

ÖRNEK.



Tanım.  $X, Y$  topolojik uzaylar olsun.

$f: X \rightarrow Y$  bijeksiyonunun tersi  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  ile  
(1-1 ve örten dır.)

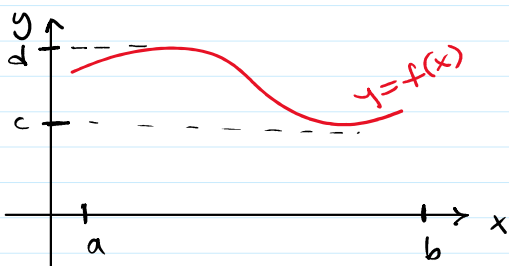
gösterilsin. Eğer  $f$  ve  $f^{-1}$  sürekli ise  $f$ 'ye  
homeomorfizma denir. Bu durumda  $X, Y$ 'ye  
homeomorfik denir ve  $X \approx Y$  ile gösterilir.

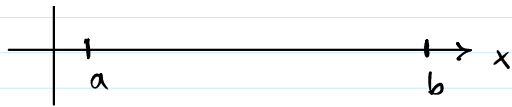
Soru: Homeomorfizma kavramı matematiksel  
olarak nasıl bu şekilde tanımlandı?

Cevap.  $f: X \rightarrow Y$  homeomorfizmasını alalım.

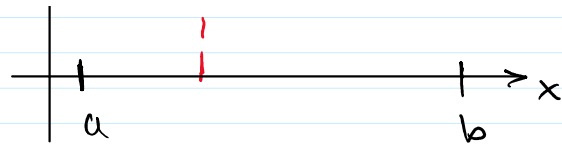
- $f: X \rightarrow Y$  sürekli olmalı çünkü  $X$ 'ten  $Y$ 'ye  
parça koparmadan geçmek istiyoruz.

Sürekli ve "Parça Koparma" ilişkisi kabaca  
bu şekilde gösterilebilir:





$f: [a, b] \rightarrow [c, d]$  sür.



$g: [a, b] \rightarrow [c, d]$  sür. DEĞİL.

•  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  var ve sürekli olmalı a'ntı

$X'$ 'ten  $Y'$ 'ye parça eklemeyi geçmek istiyoruz.

Daha detaylandırarak olursak,  $X'$ 'ten  $Y'$ 'ye hangi

yolla gittiyseniz, aynı yolla  $Y'$ 'den  $X'$ 'e dönmek

istiyoruz ve bunu yaparken  $Y'$ 'den  $X'$ 'e parça

koparmadan gitmek istiyoruz.

↳ ki bu  $X'$ 'ten  $Y'$ 'ye parça eklemeyi geçmek demek. (Gözetimleyiniz)

ÖRNEK.  $X = \{a, b, c\}$ ,  $\tau_X = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$  ve

$Y = \{1, 2, 3\}$ ,  $\tau_Y = \{Y, \emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$  verilsin.

$f: (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ ,  $f(a) = 1$ ,  $f(b) = 2$ ,  $f(c) = 3$

dönüşüm homeomorfizma mıdır?

-  $f$  bijeksiyon (1-1 & örter) ✓

-  $f$  sürekli (ödev) ✓

-  $f^{-1}: (Y, \tau_Y) \rightarrow (X, \tau_X)$  sürekli mi?

$1 \mapsto a$



—  $f^{-1} : (Y, \tau_Y) \rightarrow (X, \tau_X)$  sürekli mi?

$$1 \mapsto a$$

$$2 \mapsto b$$

$$3 \mapsto c$$

$\forall U \in \tau_X$  için  $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U) \in \tau_Y$  mi?

Önerme.

- $\text{id} : X \rightarrow X$  birim dönüşüm homeomorfizmadır.

UYARI: Burada kastedilen  $\text{id} : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$  'dır.

$$x \mapsto x$$

$\text{id} : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau')$  sürekli olmak zorunda değildir!

$$x \mapsto x$$

- $f : X \rightarrow Y$  &  $g : Y \rightarrow Z$  homeomorfizma



$g \circ f : X \rightarrow Z$  de homeomorfizmadır.

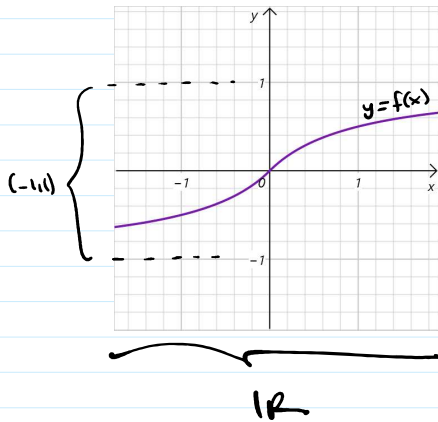
- $f : X \rightarrow Y$  homeo.  $\Rightarrow f^{-1} : Y \rightarrow X$  de homeo.dır.

Önerme. Homeomorfizm bir denklik bağıntısıdır.

ÖRNEK.  $\mathbb{R}$  ve  $(-1,1)$ , standart top. ile verilsin.

$f: \mathbb{R} \rightarrow (-1,1)$  homeomorfizma olduğunu gösterin.

$$x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$$



1. Adım:  $f$  sürekli.

Gösterilmek istenen:  $\forall U \subseteq (-1,1)$  açık için

$$f^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R} \text{ açıktır.}$$

$U = (a,b) \subseteq (-1,1)$  alalım.

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in U = (a,b)\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x}{1+|x|} \in (a,b)\right\} \end{aligned}$$

Hesap yaparken  $a$  ve  $b$ 'nin poz./neg.

olmasına dikkat et.

(mutlak değerden dolayı)

$$f^{-1}((a,b)) = \begin{cases} \left(\frac{a}{1-a}, \frac{b}{1-b}\right) & , 0 < a < b < 1 \\ (-\frac{b}{1+b}, -\frac{a}{1-a}) & , -1 < a < b < 0 \end{cases}$$

$$f^{-1}((a,b)) = \begin{cases} \left( \frac{b}{1+b}, \frac{a}{1+a} \right), & -1 < a < b < 0 \\ \left( \frac{a}{1+a}, \frac{b}{1+b} \right), & a < 0 < b \end{cases}$$

2. Adım:  $f$  1-1 ve örten.

3. Adım:  $f^{-1}: (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli. (Ödev)

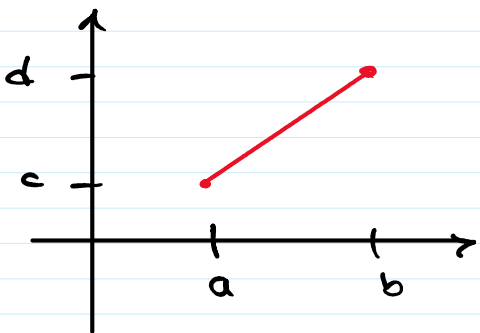
$$x \mapsto \frac{x}{1-|x|}$$

ÖRNEK.  $(a,b) \approx (c,d)$  olduğunu gösterelim.

(Buradaki uzaylar standart topoloji ile verilmiştir.)

1. Adım:  $f: (a,b) \rightarrow (c,d)$  sürekli. (Ödev)

$$x \mapsto \frac{d-c}{b-a} (x-a) + c$$



2. Adım:  $f$  1-1 & örten. (Ödev)

Böylece  $f^{-1} : (c, d) \rightarrow (a, b)$  vardır.

$$x \mapsto \frac{b-a}{d-c} (x-c) + a$$

3. Adım:  $f^{-1}$  sürekli. (Ödev)

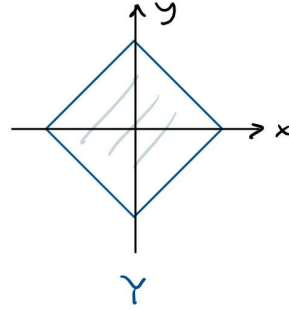
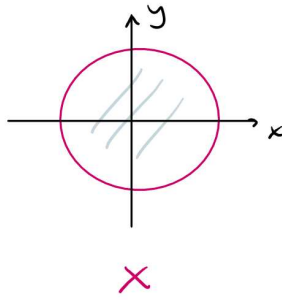
NOT: Son iki örneği birleştirirsek, geçişme özelliğinden

doğayı  $\mathbb{R} \approx (a, b)$  'dir. Aslında,

- $(a, b) \approx (c, \infty) \approx (-\infty, d) \approx \mathbb{R}$ .
- Kapalı aralıklar birbirine homeomorftur :

$$[a, b] \approx [c, d].$$

- $[a_1, b_1) \approx (a_2, b_2] \approx (-\infty, c] \approx [d, \infty)$ .

ÖRNEK.

$X \approx Y$  old. gösterelim.

$$X = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

$$Y = \{ |x_1| + |x_2| \leq 1 \}$$

$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dönüşümünü tanımlayalım.  
 $(x_1, x_2) \mapsto (\varphi(x_1), \varphi(x_2))$

Burada

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \varphi(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, \infty) \\ -x^2, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

ile verilmektedir.

1. Adım:  $F$  homeomorfizmadır. Çünkü

- $F$  sürekli (  $\varphi$  sürekli old. için )
- $F^{-1}$  dönüşümünü yazalım.

Önce  $\varphi^{-1}$  dönüşümünü bulalım:

$$\varphi^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & , x \in [0, \infty) \\ -\sqrt{-x} & , x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Böylece  $F^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  olur.

$$(x_1, x_2) \mapsto (\varphi^{-1}(x_1), \varphi^{-1}(x_2))$$

- $F^{-1}$  sürekli (  $\varphi^{-1}$  sürekli old. için ).

2. Adım:  $F: X \rightarrow Y$  dönüşümünün homeomorfizma

olduğunu görmeye çalışıyoruz. Oysa "1. Adım'da

$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  'nin homeomorfizma old. gördük.

Önce  $D(F)=X$  ve  $\text{Gör}(F)=Y$  olduğunu  
gösterelim:

$$x = (x_1, x_2) \in X \iff x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$

$$\iff |\varphi(x_1)| + |\varphi(x_2)| \leq 1$$

$$\iff F(x) \in Y$$

Bu durumda  $F(X)=Y$  bulunur.

Uyarı:  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sürekli old. gösterdik

1. adımda. Fakat sürekli fonksiyonu, tanım ve  
görüntü kümesine kısıtlarsak süreklilik bozulmaz.

("Süreklilik" konusunda kısıtlama değişiminden  
tanımının verildiği önermeye bakınız.)

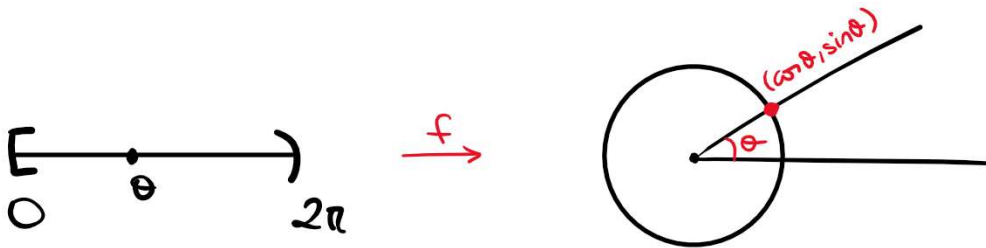
Böylece  $F: X \rightarrow Y$  süreklidir.

Benzer şekilde  $F^{-1}: Y \rightarrow X$  sürekli old. gözüktür.

Sonuç olarak  $X \approx Y$  bulunur.

ÖRNEK.  $f : [0, 2\pi) \rightarrow S^1$   
 $\theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$

(Burada  $[0, 2\pi)$  ve  $S^1$  uzayları standart top. ile verilmiştir.)



- $f$  sürekli.
- $f$  1-1 ve örten. Böylece  $f^{-1}$  vardır.
- $f^{-1}$  sürekli değildir.

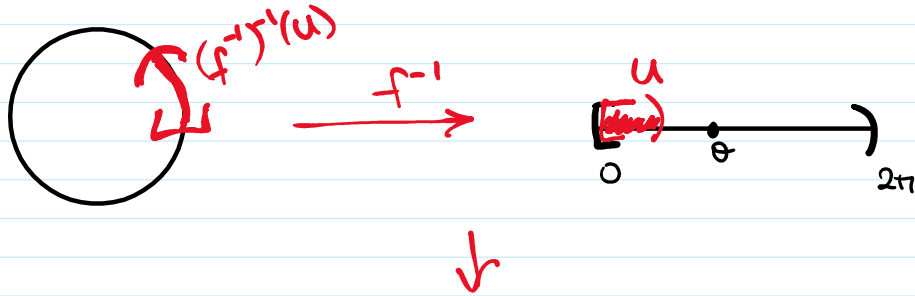
$U = [0, \frac{\pi}{4}) \subseteq [0, 2\pi)$  açık alalım.

$$\begin{aligned} (f^{-1})^{-1}(U) &= f(U) = f([0, \frac{\pi}{4})) \\ &= \{ (\cos x, \sin x) \in S^1 \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \} \end{aligned}$$

Böylece  $f(U)$ ,  $S^1$  üzerinde  $(1, 0)$ 'dan (bu nokta dahil)



Böylece  $f(u)$ ,  $S'$  üzerinde  $(1,0)$ 'dan (bu nokta dahil)  
 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  kadar olan (bu nokta dahil değil) aralıktır.



SORU: Peki bu,  $[0, 2\pi) \not\cong S'$  olduğunu mu söyler?

CEVAP: HAYIR!

$[0, 2\pi)$  ve  $S'$  arasında belki başka bir  
dönüşüm daha vardır ve bu dönüşüm  
homeomorfidir. Hence bilemiyoruz.

Tüm  $S' \rightarrow [0, 2\pi)$  dönüşümlerini kontrol  
etmemiz gerek.

(spoiler: aslında Şöyle bir homeo. yok.

→ daha ileri  
topoloji bilgisi  
gerekir.

↓  
Bu yüzden  $[0, 2\pi) \not\cong S'$  diyeceğiz.)

NOT:  $X \approx Y$  olsun.

$X$  ve  $Y$  arasında 1'den fazla homeo. olabilir.

Ödev:  $X$  ve  $Y$  uzaylarını istediğiniz gibi seçerek, yukarıdaki "NOT" için bir örnek veriniz.

Soyut Cebir dersinden grup izomorfizmasının bir denklik bağıntısı olduğunu ve grup üzerindeki cebirsel yapıyı koruduğunu biliyoruz (Yani iki grup izomorf ise ikisi aynı grup yapısına sahip).

Homeomorfizma da aynı şeyi topolojik uzaylar üzerinde yapıyor: Uzaylar üzerindeki topolojik yapıyı koruyor.

Tanım. Homeomorfizma altında korunan özelliklere topoloji invariantı / topoloji değişmez / topolojik özellik denir.

## NOT:

- İki uzayın homeomorf olduğunu, uzaylar arasında bir homeomorfizma tanımlayarak gösterebiliriz.

Fakat bu her zaman kolay değildir.

- Eğer iki uzayın homeomorf olmadığını göstermek istiyorsak, iki uzay arasındaki hiçbir dönüşümün homeomorfizma olmaması gerekir.

↙  
İki uzay arasındaki TÜM dönüşümler kontrol edilmeli.

Çok zor!

Bunun yerine "topolojik özelliklerden" faydalana-  
cağız. Eğer bir uzaydaki bir topolojik özellik  
diğer uzayda yoksa bu iki uzay homeomorf değildir,  
diyeceğiz.

ÖRNEK. Aşağıdaki tablolara göre  $X$  ve  $Y$

ÖRNEK. Aşağıdaki tablolara göre  $X$  ve  $Y$

uzaylarının homeomorf olup-olmadığına dair ne söylenebilir?

a)

|                      | $X$ | $Y$ |
|----------------------|-----|-----|
| Topolojik Özellik #1 | VAR | YOK |

b)

|                      | $X$ | $Y$ |
|----------------------|-----|-----|
| TOPOLOJİK ÖZELLİK #1 | VAR | VAR |
| TOPOLOJİK ÖZELLİK #2 | VAR | YOK |

c)

|                      | $X$ | $Y$ |
|----------------------|-----|-----|
| Topolojik Özellik #1 | VAR | VAR |

Bir Topolojik Özellik: Hausdorff Olma

Tanım.  $X$  uzayı  $\Leftrightarrow \forall x, y \in Y$  için,  
Hausdorff'lr.  $\exists U \in \mathcal{U}(x), \exists V \in \mathcal{U}(y)$   
vardır ki  $U \cap V = \emptyset$ .

Teorem<sup>2</sup>. Bir uzayın Hausdorff olması topolojik  
özelliktir. Bir başka deyişle,  $f: X \rightarrow Y$  homeo. ve  
 $X$  Hausdorff ise  $Y$  de Hausdorff'lr.

Örnek.  $(\mathbb{R}, \tau_s)$  Hausdorff uzaydır.

$\forall x, y \in \mathbb{R}$  için

$\exists U = B_d(x, r) \in \mathcal{U}(x), \exists V = B_d(y, r) \in \mathcal{U}(y)$

vardır ki  $U \cap V = \emptyset$  olur.  $\left[ r = \frac{d(x, y)}{1000} \text{ olm. öz.} \right]$

Teorem<sup>2</sup>'nin ispatı.  $X$  Hausdorff,  $f: X \rightarrow Y$  homeo. olsun.

Amaç.  $Y$  Hausdorff old. göstermek. Yani,

$\forall y_1, y_2 \in Y$  için  $\exists U_1 \in \mathcal{U}(y_1), \exists U_2 \in \mathcal{U}(y_2) :$

$U_1 \cap U_2 = \emptyset$  old. göstermek.

$y_1, y_2 \in Y$  alalım.  $f$  biyektif olduğundan,

$\left. \begin{array}{l} \exists! x_1 \in X \text{ vardır ki } f(x_1) = y_1 \\ \exists! x_2 \in X \text{ vardır ki } f(x_2) = y_2 \end{array} \right\} \text{ olur.}$

$X$  Hausdorff olduğundan,  $\exists V_1 \in \mathcal{U}(x_1), \exists V_2 \in \mathcal{U}(x_2)$   
vardır ki  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  olur.

Buradan  $f(V_1) \in \mathcal{U}(\overbrace{f(x_1)}^{=y_1})$  ve  $f(V_2) \in \mathcal{U}(\overbrace{f(x_2)}{=y_2})$   
olur.

Diğer taraftan,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  olduğundan

$\Downarrow$

$$f(V_1 \cap V_2) = f(\emptyset)$$

$\Downarrow \leftarrow f$  biyektif olduğundan  
 $f(V_1 \cap V_2) = f(V_1) \cap f(V_2)$  olur.

$$f(V_1) \cap f(V_2) = \emptyset$$

Ayrıca  $f^{-1}$  sürekli olduğundan (çünkü  $f$  homeomorfizma)  
 $f(V_1), f(V_2) \subseteq Y$  açıktır.

O zaman  $\exists U_1 := f(V_1) \in \mathcal{U}(x_1)$  ve

$\exists U_2 := f(V_2) \in \mathcal{U}(x_2)$  buluruz ki

$U_1 \cap U_2 = f(V_1) \cap f(V_2) = \emptyset$  olur.  $\square$

ÖRNEK.  $X$  Hausdorff olsun ve  $Y$  Hausdorff olmasın.

$X$  ve  $Y$  homeomorf mudur?

Hausdorff olma topolojik özellik olduğu için  
 $X \not\approx Y$  olur.

Daha önceki şekilde söyleyebiliriz:

Varsayalım ki  $X \approx Y$  olsun.

O zaman  $\exists f: X \rightarrow Y$  homeomorfizma vardır.

Teorem<sup>2</sup>'den dolayı  $X$  Hausdorff ve  $X \approx Y$  old. için

$Y$  de Hausdorff olmak zorundadır.  $\checkmark$

... ..



Varsayım hatalı.  $X \neq Y$  olmalı!  $\square$

Tanım. Bir  $X$  kümesi üzerinde bir  $d$  **metriği**, aşağıdaki özellikleri sağlayan  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyondur.

M1)  $d(x, y) \geq 0$ ,  $\forall x, y \in X$  için.

M2)  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ .

M3)  $d(x, y) = d(y, x)$ ,  $\forall x, y \in X$  için.

M4)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ ,  $\forall x, y, z \in X$  için.

- $d(x, y)$ 'ye  $x$  ve  $y$  arasındaki **uzaklık** denir.
- $(X, d)$ 'ye **metrik uzay** denir.

Örnek.  $\mathbb{R}$  üzerinde  $d_s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto d_s(x, y) = |x - y|$$

ile tanımlanan fonksiyon bir metriktir.

(M1)  $d_s(x, y) = |x - y| \geq 0$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  için.

(M2)  $d_s(x, y) = |x - y| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$ .

(M3)  $d_s(x, y) = |x - y| = |y - x| = d_s(y, x)$ .

(M4)  $\forall x, y, z \in X$  için,

$$d_s(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d_s(x, z) + d_s(z, y)$$

↑  
üçgen eşitsizliği

↑  
Mutlak değer  
özelligi



$d_5$ 'ye standart metrik denir.

$(\mathbb{R}, d_5)$ 'e standart / Öklid metrik ağı denir.

ÖRNEK.  $(\mathbb{R}^2)$ 'de üç farklı metrik

$x = (x_1, x_2)$  ve  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  olmak üzere

1)  $\mathbb{R}^2$ 'de standart / Öklid metriği:

$$d_5(x, y) = d_5((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

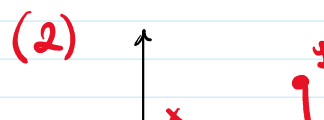
2)  $\mathbb{R}^2$ 'de Taxicab / Manhattan metriği:

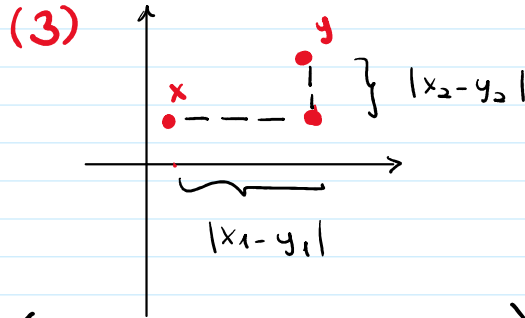
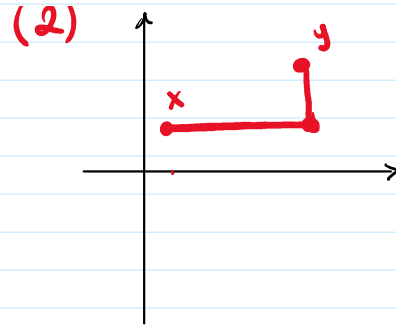
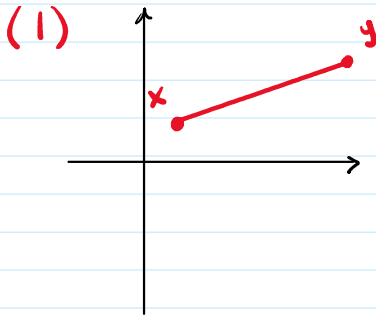
$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

3)  $\mathbb{R}^2$ 'de Maksimum metrik:

$$d_\infty(x, y) = \max \{ |x_1 - y_1|, |x_2 - y_2| \}$$

•  $x$  ve  $y$  arasındaki uzaklığı (1) - (3) metrikleri nasıl ölçer?





(yatay ve dikey mesafelerden  
büyük olanı alınır.)

ÖRNEK.  $\mathbb{R}^n$ 'de standart / Öklid metriği:

$x = (x_1, \dots, x_n)$  ve  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  olm.  $\mathbb{C}2$ .

$$d_s(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

ÖRNEK.  $\mathbb{C}$ 'de standart metrik:

$z_1 = x_1 + iy_1$  ve  $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$  olm.  $\mathbb{C}2$ .

$$d: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(z_1, z_2) \mapsto d(z_1, z_2) = \|z_1 - z_2\|$$

$$= \|(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)\|$$

$$= \|(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)\|$$

$$= \|(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)\|$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ÖRNEK. ( $\mathcal{C}^0[a, b]$ 'de iki farklı metrik)

$$\mathcal{C}^n[a, b] = \left\{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ n-inci mertebeye kadar } \underline{\text{lim}} \text{ mertebeden türevleri sürekli olan fkt.} \right\} \quad \text{kümesini}$$

tanımını verelim.

$$\text{Özel olarak } \mathcal{C}^0[a, b] = \left\{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ 0-inci mertebeden türevi sürekli olan fkt.} \right\}$$

↑ fonksiyonun sürekli olması demek

$$= \{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli} \}.$$

$$(1) d_0: \mathcal{C}^0[a, b] \times \mathcal{C}^0[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f, g) \mapsto d_0(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

tanımlanan fonksiyon bir metriktir. Bu metriğe

**Supremum metrik** denir.

$$(M1) \quad d_0(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| \geq 0$$

$$x \in [a, b]$$

$$M2) d_0(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| = 0 \text{ olsun.}$$

$$\Rightarrow \forall x \in [a, b] \text{ için } |f(x) - g(x)| = 0 \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow \forall x \in [a, b] \text{ için } f(x) - g(x) = 0.$$

$$\Rightarrow f = g.$$

$$f = g \text{ olsun.} \rightarrow \forall x \in [a, b] \text{ için } f(x) = g(x) \text{ olur.}$$

$$\text{Buradan } d_0(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - f(x)| = 0. \quad \text{yerine yaz}$$

$$M3) d_0(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in [a, b]} |g(x) - f(x)| = d_0(g, f).$$

$$M4) \forall x \in [a, b] \text{ için}$$

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)|$$

$$\leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$$

Mutlak değ.  
diziliği

$$\leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in [a, b]} |h(x) - g(x)|$$

$$= d_0(f, h) + d_0(h, g)$$

$$\text{Böylece } \forall x \in [a, b] \text{ için } |f(x) - g(x)| \leq d_0(f, h) + d_0(h, g) \text{ bulduk.}$$

O zaman  $\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \leq d_0(f, h) + d_0(h, g)$  olur.

$$\Downarrow \\ d_0(f, g) \leq d_0(f, h) + d_0(h, g). \quad \square$$

(2)  $d: C^0[a, b] \times C^0[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$(f, g) \mapsto d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

ile tanımlanan fonksiyon bir metriktir. Bu metriğe **integral metriği** denir. (Ödev)

ÖRNEK. ( $C^1[a, b]$ 'de bir metrik)

$d_1: C^1[a, b] \times C^1[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$(f, g) \mapsto d_1(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in [a,b]} |f'(x) - g'(x)|$$

ile tanımlanan fonksiyon bir metriktir. (Ödev)

ÖRNEK.  $\emptyset \neq X$  bir küme olsun.

$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto d(x, y) = \begin{cases} 0 & , x=y \\ 1 & , x \neq y \end{cases}$$

fonksiyonu  $X$  üzerinde bir metriktir. (Örnek)

$d$  metriğine ayrık/diskret metrik denir.

ÖRNEK.  $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ile tanımlanan fonksiyon metrik değildir.  
 $(x, y) \mapsto (x-y)^2$

(M4) sağlanmaz. Örneğin,  $x=5$ ,  $y=2$  ve  $z=3$  alalım.

$$d(5, 2) \neq d(5, 3) + d(3, 2). \text{ Çünkü}$$

$$\underbrace{(5-2)^2}_9 \neq \underbrace{(5-3)^2}_4 + \underbrace{(3-2)^2}_1 \text{ dir.}$$

Teorem.  $(X, d)$  metrik uzay olsun.  $Y \subseteq X$  ise  $(Y, d)$  de metrik uzaydır.

ÖRNEK. 1.  $(\mathbb{R}^2, d_s)$  metrik uzayı verilsin.

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$  kümesi verilsin.  $(A, d_s)$  bir metrik uzaydır.

2.  $(\mathbb{R}, d_s)$  metrik uzayı verilsin.

•  $(\mathbb{Q}, d_s)$  bir metrik uzaydır.

•  $(\Gamma_{2.107}, d_s)$  bir metrik uzaydır.



•  $([3, 10], d_s)$  bir metrik uzaydır.

Soru: Bir metrikten topoloji elde edilebilir mi?

Cevap: Evet.



Tanım.  $(X, d)$  metrik uzay olsun.  $x \in X$  ve  $\varepsilon > 0$  olsun.

$$B_d(x, \varepsilon) = \{ y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon \} \quad \begin{array}{l} \text{— } x \text{ merkezli} \\ \varepsilon \text{ yarıçaplı} \\ \text{açık disk/yuvar} \end{array}$$

&

$$\overline{B}_d(x, \varepsilon) = \{ y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon \} \quad \begin{array}{l} \text{— } x \text{ merkezli} \\ \varepsilon \text{ yarıçaplı} \\ \text{kapalı disk/yuvar} \end{array}$$

ÖRNEK.  $(\mathbb{R}, d_3)$  standart metrik uzay olsun.

$$B_d(x, \varepsilon) = \{ y \in \mathbb{R} \mid d(x, y) < \varepsilon \} = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

ÖRNEK. a)  $\mathbb{R}^2$  'deki standart metrik

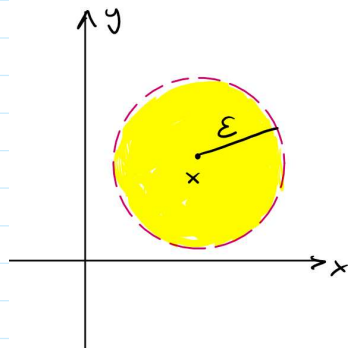
b)  $\mathbb{R}^2$  'deki Manhattan metriği

c)  $\mathbb{R}^2$  'deki max metrik

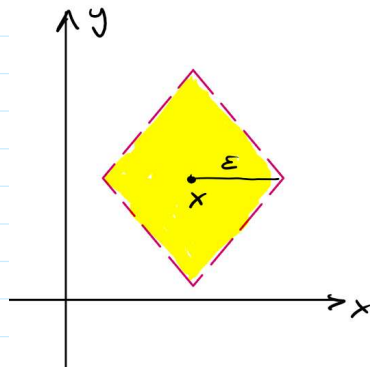
icin acik diskleri inceleyelim.

$x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  olm. dz.,

$$\begin{aligned} (a) \quad B_{d_s}(x, \varepsilon) &= \{ y \in \mathbb{R}^2 \mid d_s(x, y) < \varepsilon \} \\ &= \{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} < \varepsilon \} \\ &= \{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 < \varepsilon^2 \} \end{aligned}$$



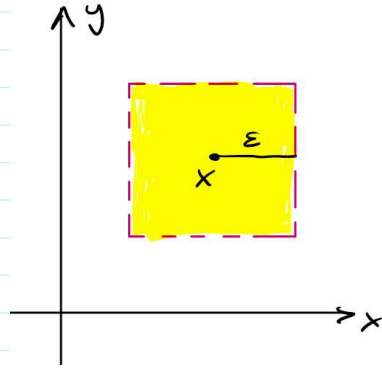
$$\begin{aligned} (b) \quad B_{d_T}(x, \varepsilon) &= \{ y \in \mathbb{R}^2 \mid d_T(x, y) < \varepsilon \} \\ &= \{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| < \varepsilon \} \end{aligned}$$



$$(c) \quad B_{d_M}(x, \varepsilon) = \{ y \in \mathbb{R}^2 \mid d_M(x, y) < \varepsilon \}$$

$$(c) B_{d_H}(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid d_H(x, y) < \varepsilon\}$$

$$= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} < \varepsilon\}$$



Teoreu.  $(X, d)$  metrik uzay olsun.

$\mathcal{B} = \{B_d(x, \varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$ ,  $X$  üzerinde bir topoloji için bir bazdır.

İspat. Amaç.  $\mathcal{B}$  baz mı? Yani,

i)  $\forall x \in X$  için  $\exists B \in \mathcal{B}$  vardır ki  $x \in B$  olur.

ii)  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  ve  $x \in B_1 \cap B_2$  ise

$\exists B_3 \in \mathcal{B}$  vardır ki  $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$  olur.

(i)  $\forall x \in X$  için  $\exists B = B_d(x, \varepsilon)$  vardır ki  $x \in B$  olur.

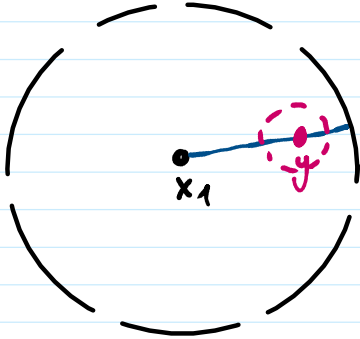
Herhangi  $\varepsilon$  seçilebilir.

(ii)  $B_1 = B_d(x_1, \varepsilon_1)$ ,  $B_2 = B_d(x_2, \varepsilon_2) \in \mathcal{B}$

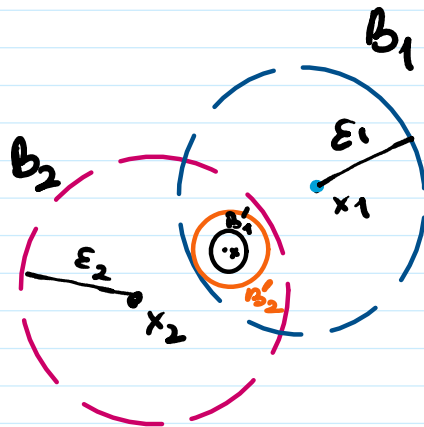
ve  $x \in B_1 \cap B_2$  alalım.

$B_d(x_1, \delta_1)$  için, eğer  $x \in B_d(x_1, \varepsilon_1)$  ise

$\exists \delta_1 > 0$  için  $\underbrace{B_d(x_1, \delta_1)}_{B_1'} \subseteq B_d(x_1, \varepsilon_1)$ .



Benzer şekilde  $\exists \delta_2 > 0$  vardır ki  $\underbrace{B_d(x_2, \delta_2)}_{B_2'}$   $\subseteq B_d(x_2, \varepsilon_2)$ .



$\delta := \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$  alalım. Bu durumda

$x \in \underbrace{B_d(x, \delta)}_{B_3 \in \mathcal{B}} \subseteq B_1 \cap B_2$  bulunur.  $\square$

Tanım  $(X, d)$  metrik uzay olsun.

$\mathcal{B} = \{ B_d(x, \varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon > 0 \}$  ile genilen/üretilen/döğrulan topolojiye  $d$  metriği ile genilen/üretilen/döğrulan topoloji denir. Ayrıca bu topolojiye metrik topoloji de denir.

Teorem<sup>2</sup>  $(X, d)$  metrik uzay olsun.

$A \subseteq X$  açıktır.  $\Leftrightarrow \forall y \in A$  için  $\exists \delta > 0 :$

$\nearrow$   
( $d$  tarafından üretilen)  
(topolojiye göre açık)

$$B_d(y, \delta) \subseteq A.$$

• Metrik Uzaylarda :

- açık diskler açıktır (metrik topolojisinin bazı elemanı olduklarından)

- kapalı diskler kapalıdır. Hatta

$$\bar{B}_d(x, \varepsilon) = \text{cl}(B_d(x, \varepsilon)) \text{ 'dır.}$$

ÖRNEK<sup>1</sup>.  $(\mathbb{R}, d_2)$  standart metrik uzay olsun.

ÖRNEK.  $(\mathbb{R}, d_1)$  standart metrik uzay olsun.

$$B_d(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} \mid d(x, y) < \varepsilon\} = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \text{ olm. 42.}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \{B_d(x, \varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\} \\ &= \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}\end{aligned}$$

bu ile üretilen topoloji  $\mathbb{R}$ 'deki standart topolojidir.

ÖRNEK.  $\mathbb{R}^n$ 'deki standart metrik,  $\mathbb{R}^n$ 'deki standart topolojiyi doğurur.

Teorem. Metrik ile üretilen her topolojik uzay Hausdorff'kr.

Sonuç. Eğer bir topolojik uzay Hausdorff değil ise  
bu uzay bir metrik ile üretilmemiştir.

ÖRNEK.  $(\mathbb{R}, \tau_{fc})$  Hausdorff değildir. (ödev)

Bu yüzden  $(\mathbb{R}, \tau_{fc})$  bir metrik ile üretilmemiştir.

ÖRNEK.  $|X| \geq 2$  olm.  $\forall$  herhangi  $t$  time olsun.

$(X, \tau_{ind.})$  top. uzayı Hausdorff değildir.

Bu yüzden Sonuçta dolayı,  $(X, \tau_{ind.})$  bir  
metrik ile üretilmemiştir.

Soru: Bir  $t$  time üzerinde birden fazla metrik

tanımlanabilir. Peki, bu metriklerin doğurduğu topolojileri

birbiri ile kıyaslayabilir miyiz?



Teorem 4.  $d$  ve  $d'$ ,  $X$  üzerinde metrikler olsun.

$\tau$  ve  $\tau'$  da sırasıyla, bu metriklerin doğurduğu topolojiler olsun. Bu durumda

$\tau, \tau'$ 'den  $\iff \forall x \in X$  ve  $\varepsilon > 0$  için  
daha incedir.  $\exists \delta > 0$  vardır ki  
 $B_{d'}(x, \delta) \subseteq B_d(x, \varepsilon)$  olur.

Sonuç.  $\mathbb{R}^2$ 'de standart metrik, Manhattan metriği ve max metrik aynı topolojiyi doğurur.

İspat Taslağı:  $d_s, d_T, d_M$ 'in doğurduğu topolojiler  $\tau_s, \tau_T$  ve  $\tau_M$  ile gösterilsin.

Önce  $\tau_s \subseteq \tau_T$  ve  $\tau_T \subseteq \tau_s$  old. gösterin.

( $\tau_T$  daha ince) ( $\tau_s$  daha ince)

Böylece  $(\mathbb{R}, \tau_s) \approx (\mathbb{R}, \tau_T)$ . Hatta  $\tau_T = \tau_s$ 'dir.

Benzer şekilde  $(\mathbb{R}, \tau_s) \approx (\mathbb{R}, \tau_M)$  olduğunu da gösterin. Böylece 3 uzay da denktir.  $\square$

ÖRNEK.  $\mathbb{R}^2$ 'deki tüm metrikler  $\tau_s$ 'yi doğurmaz.

Örneğin,

Örneğin,

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad x_1 \neq y_1 \text{ ve ya } |x_2 - y_2| \geq 1 \\ |x_2 - y_2| & , \quad x_1 = y_1 \text{ ve } |x_2 - y_2| < 1 \end{cases}$$

$(x_1, x_2)$     $\parallel$     $(y_1, y_2)$

metriğini alalım. Bu metrik,  $\mathbb{R}^2$ 'de  $\tau_s$ 'den daha ince bir topolojiyi doğurur.

Soru: Hangi şartlar altında, metriği değiştirsek bile cretilen topoloji değişmeden kalır?

Cevap: Bunun için "sınırlı metrik" kavramını ve Teorem 5'i vereceğiz.

Tanım.  $(X, d)$  metrik uzay olsun.

$A \subseteq X$ ,  $d$  metriği  $\Leftrightarrow \exists \mu > 0$  vardır ki  
altında sınırlıdır  $\Leftrightarrow$  tüm  $x, y \in A$  için  
( $d$  metriğine göre  $d(x, y) \leq \mu$  olur.  
sınırlıdır) dır.

• Eğer  $A = X$  alınırsa,  $d$ 'ye sınırlı metrik dır.

Teorem<sup>5</sup>.  $(X, d)$  metrik uzay olsun.

$$d' : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto d'(x, y) = \min \{ d(x, y), 1 \}$$

metriği verilsin. Bu durumda  $d'$ ,  $d$  ile aynı topolojiyi doğuran sınırlı bir metriktir.

İspat Taslağı.

- $d'$  en fazla 1 değerini alabildiği için sınırlıdır.
- $d$  ve  $d'$ , sırasıyla  $\tau$  ve  $\tau'$  topolojilerini doğursunlar. Teorem<sup>4</sup> kullanılarak,  $\tau' \subseteq \tau$  ve  $\tau \subseteq \tau'$  olduğu gösterilir.  $\square$

ÖRNEK.  $(\mathbb{R}, d_s)$  verilsin.

$$d'(x, y) = \min \{ d_s(x, y), 1 \} \text{ alalım.}$$

$d'$ , Teorem<sup>5</sup>'ten dolayı  $(\mathbb{R}, \tau_s)$ 'yi doğurur.

ÖRNEK.  $(\mathbb{R}^2, d_T)$  Manhattan metrik uzayı verilsin.

$$\bar{d}(x, y) = \min \{ d_T(x, y), 1 \} \text{ alalım.}$$

$d_T$ 'nin  $\mathbb{R}^2$  üzerinde oluşturduğu topoloji  $\tau_s$ 'dir.

Çünkü

- $d_T$ ,  $\mathcal{T}_S$ 'yi doğurur (biliyoruz). <sup>(1)</sup>
  - Teorem 5'ten dolayı  $d_T$  ve  $\bar{d}$  aynı topolojiyi doğurur. <sup>(2)</sup>
- (1) ve (2)'den dolayı  $\bar{d}$ ,  $\mathcal{T}_S$ 'yi doğurur.

Amaç.  $d$  metriği varsa  $\longrightarrow (X, \tau)$  elde edilir.

$(X, \tau)$  varsa  $\longrightarrow (X, \tau)$ 'yu üreten  $d$  bulunabilir mi?

Tanım.  $(X, \tau)$  topolojik uzay olsun.

$X$ 'e metriklenebilir denir.  $\Leftrightarrow X$  üzerinde,  $\tau$ 'yu üreten  
(metrizable) bir  $d$  metriği vardır.

ÖRNEK.  $(\mathbb{R}, \tau_s)$  metriklenebilirdir.

Çünkü  $(\mathbb{R}, \tau_s)$ ,  $d_s$  ile üretilir.

ÖRNEK.  $(\mathbb{R}^2, \tau_s)$  metriklenebilirdir.

Çünkü,  $d_s$  (veya  $d_T$  veya  $d_M$ ) ile üretilir.

Teorem. Metriklenebilme topoloji in varyantıdır.

Yani,  $X \approx Y$  olsun. Eğer  $X$  metriklenebilir ise  $Y$  de metriklenebilir.

SORU:  $(X, \tau)$ 'nın metriklenebilmesi,  $X$ 'te  $\tau$ 'yu üreten

Cevap: Evet, bir topolojik uzayın metriklenemez, yani bir  $d$  metriği bulmak demekdir.

Peki, bir topolojik uzayın metriklenebilir olduğunu,  $d$  metriğini direkt bulmanın nasıl söyleyebiliriz?

Bir başka deyişle, hangi şartlar altında bir uzayın metriklenebilir olduğunu söyleriz?

Cevap: Uryshon Metriklenebilme Teoremi.

Bu teoremi vermeden önce, teorende geçen regüler uzayın tanımını vereceğiz.

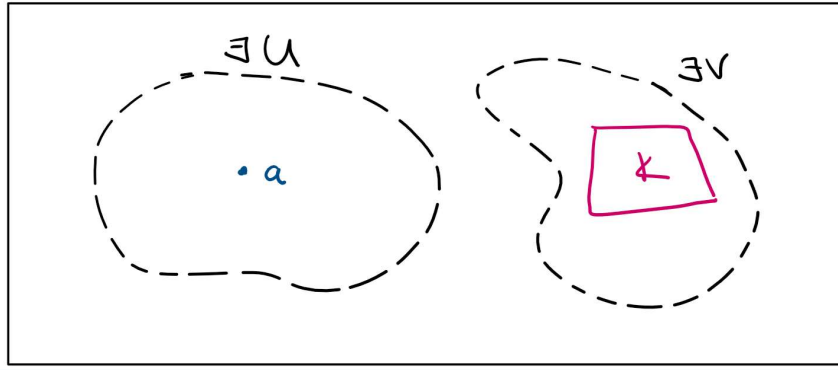
Tanım.  $X$  topolojik uzay olsun. Eğer  $X$  aşağıdaki şartları sağlıyorsa,  $X$ 'e **regüler uzay** denir.

i) Tek elemanlı kümeler  $X$ 'te kapalıdır.

ii)  $\forall a \in X$  ve  $\forall K \subseteq X$  kapalı ( $a \notin K$  ol. tek.),

$\exists U, V \subseteq X$  açık ayrık kümeler ( $U \cap V = \emptyset$ )

vardır ki  $a \in U$  ve  $K \subseteq V$  dir.



X

- Regüler uzay, Hausdorff uzayının daha güçlendirilmiş hali olarak düşünülebilir.

Örnek.  $X$  regüler ise  $X$  Hausdorff'ür.

- Tersini her zaman doğru değildir.

ÖRNEK.  $\mathbb{R}$  kumesini alalım.

$$\mathcal{B} = \{ (a,b), (c,d) \cap \mathbb{Q} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \},$$

$\mathbb{R}$  üzerinde bir topoloji için bazdır.

Bu bazın doğurduğu topoloji Hausdorff'ür,

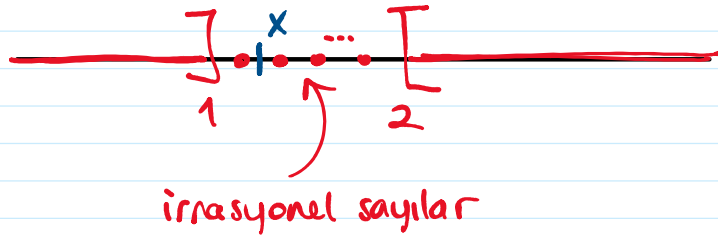
fakat regüler değildir.

Öncelikle,  $\{x\} \subseteq \mathbb{R}$  kapalı çünkü

$(-\infty, x) \cup (x, \infty) \subseteq \mathbb{R}$  açıktır.

$$\text{Fakat } K = ((1,2) \cap \mathbb{Q})^c \\ = (-\infty, 1] \cup [2, \infty) \cup ((1,2) \cap \mathbb{Q}^c)$$

$K$ 'nin bu uzayda kapalıdır.



$x \in (1,2) \cap \mathbb{Q}$  seçelim.

$\forall U \in \mathcal{U}(x)$  için  $U \cap K \neq \emptyset$ .

Çünkü  $U$ 'yu ne kadar küçük seçersek seçelim, bu topolojide  $x$  ađ bir rasyonel sayı bulunur (Archimet özelliğinin sonucu).

Böylece  $\forall U \in \mathcal{U}(x)$  ve  $K \subseteq Y$  ol. şek.

$\forall V \subseteq \mathbb{R}$  açık için  $U \cap V \neq \emptyset$  bulunur.  $\square$

Teorem. Regüler olma topolojik özelliktir.

Teorem. (Uryson Metriklenebilme Teoremi)

$(X, \tau)$ 'nin sayılabılır bir bazı varsa ve  $(X, \tau)$



$(X, \tau)$ 'nin sayılabilir bir bazı varsa ve  $(X, \tau)$  regüler ise  $(X, \tau)$  metriklenelirdir.

Sonlu ve ya

Sonlu sayılabilir

[Adams & Frazarosa'daki tanım]

Tanım.  $X$  bir topolojik uzay olsun.

i) Eğer birleşimleri  $X$ 'i veren, ayrık, boştan farklı iki açık küme varsa,  $X$ 'e **bağılantısızdır** denir.

( $\exists U, V \subseteq X$  açık vardır ki  $U \cap V = \emptyset$ ,  $U \cup V = X$  olur)

$\emptyset \neq \emptyset$

↳ Bu şekilde verilen  $U$  ve  $V$ 'ye  
 $X$ 'in bir **ayrışımı** denir.  
(separation)

ii)  $X$  uzayı bağılantısız değil ise  $X$ 'e **bağılantılıdır** denir.

ÖRNEK.

a)  $X = \{a, b, c\}$ ,  $\tau = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}, \{c\}\}$  veilsin.

$U = \{a, b\}$ ,  $V = \{c\} \in \tau$  seçelim.

•  $U \neq \emptyset$  ve  $V \neq \emptyset$

•  $U \cup V = X$

•  $U \cap V = \emptyset$

→  $(X, \tau)$  bağılantısızdır.

b)  $X = \{a, b, c\}$ ,  $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}\}$  verilsin.

Birleşimi  $X'$ 'i verir, ayrık, boşten farklı iki küme yoktur.

$(X, \tau_2)$   $\Downarrow$  bağlantılıdır.

ÖRNEK.  $|X| \geq 2$  olmak üzere,  $X$  diskret topolojik uzayı

bağılantısızdır. Çünkü

- $\emptyset \neq U \in \tau = \mathcal{P}(X)$  ve  $\emptyset \neq U^c \in \tau = \mathcal{P}(X)$  alalım.
- $U \cap U^c = \emptyset$
- $U \cup U^c = X$ .

Teorem!  $X$  bağlantılıdır.



$X'$ 'in hem açık hem de kapalı olan, boşten farklı, hiçbir özalt alt kümesi yoktur.  
(proper)

Bir başka deyişle,  $X'$ 'teki hem açık hem de kapalı

Bir başka deyişle,  $\mathcal{A}$  hem açık hem de kapalı kümeler sadece  $\emptyset$  ve  $X$ 'tir.

ÖRNEK.  $(\mathbb{R}, \tau_2)$  bağlantılıdır.

Çünkü bu uzayda  $[a, b)$  hem açık hem de kapalıdır.

$[a, b)$  kapalıdır çünkü  $[a, b)^c = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$  açıktır.

$(-\infty, a)$  açıktır çünkü

$(-\infty, a) = \dots \cup [a-2, a-1) \cup [a-1, a) \cup \dots$

$(\tau_2)$ 'den dolayı açıktır.

$[b, \infty)$  açıktır çünkü

$[b, \infty) = [b, b+1) \cup [b+1, b+2) \cup \dots$

$(\tau_2)$ 'den dolayı açıktır.



Böylece  $(\mathbb{R}, \tau_2)$  Teorem 1'den dolayı bağlantılıdır.

Ödev:  $(\mathbb{R}, \tau_2)$ 'nin bağlantısız olduğunu gösteriniz.

ÖRNEK.  $|X| \geq 2$  olmak üzere,  $X$  diskret topolojik

uzayının bağlantısız olduğu Teorem 1'den de görülür.

- Şimdi aşağıdaki örneklere bakalım.

|| ÖRNEK<sup>a</sup>.  $X = (1, 2) \cup (3, 5) \subseteq \mathbb{R}$  bağlantısızdır. ↙ standart top. ile verilsin.

$X$  bağlantısızdır. Çünkü

- $U = (1, 2) \neq \emptyset$  ve  $V = (3, 5) \neq \emptyset$  seçelim.
- $U = (1, 2)$  ve  $V = (3, 5)$ ,  $X'$ 'te açıktır.
- $U \cap V = \emptyset$
- $U \cup V = X$

↙ standart top. ile verilsin.  
ÖRNEK<sup>b</sup>.  $X = (1, 2] \cup [3, 5) \subseteq \mathbb{R}$  bağlantısızdır.

Çünkü  $U = (1, 2]$  ve  $V = [3, 5)$ ,  $X'$ 'de açıktır  
ve  $X'$ 'nin bir ayrışımı olarak bunlar alınabilir.

- Aşağıdaki tanım, ÖRNEK<sup>a</sup> ve ÖRNEK<sup>b</sup>'de,

" $X$  bağlantısızdır" demek yerine " $X$ ,  $\mathbb{R}$ 'de bağlantısızdır"  
da denileceğini söyler.

da denebileceğini söyler.

Tanım.  $A \subseteq X$  alt küme olsun.

- Eğer  $A$  alt uzay topolojisinde bağlantılı ise  $A$ 'ya  $X$ 'te bağlantılıdır denir;
- $A$ ,  $X$ 'te bağlantılı değil ise  $A$ 'ya  $X$ 'te bağlantısızdır denir.

ÖRNEK<sup>a</sup>.  $X = \{a, b, c\}$ ,  $\tau = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}, \{c\}\}$

verilsin.  $A = \{a, b\} \subseteq X$  alınsın.

$A$ ,  $X$ 'te bağlantılı mıdır?

Amaç.  $A$ , alt uzay topolojisine göre bağlantılı mı?

$$\tau_A = \{\{a, b\}, \emptyset, \{b\}\}$$

Boşları farklı, ayrık ve birleşimleri  $A$ 'yı veren

öyle  $U_A, V_A \in \tau_A$  bulamıyoruz!



$A$ ,  $X$ 'te bağlantılıdır. //

ÖRNEK<sup>b</sup> 'u: tekrar inceleyelim.

ÖRNEK<sup>b</sup> 'yi tekrar inceleyelim:

$X = (1, 2] \cup [3, 5) \subseteq \mathbb{R}$  ve  $X$  üzerinde standart topoloji verilmiştir.

Hatırlatma: Eğer  $X \subseteq \underline{\mathbb{R}^n}$  olsun.

$X$ 'te,  $(\mathbb{R}^n, \tau_s)$ 'den gelen alt uzay topolojisi  $\tau$  olsun.

$(X, \tau)$ , standart topolojik uzay olarak adlandırılır.

Böylece  $U = (1, 2]$ ,  $X$ 'te açıktır. Aslında, alt uzay topolojisine göre açıktır. Detaylandıralım:

$\bar{U} = (1, 5/2) \in \tau_s$  ol. şek.  $U = \bar{U} \cap X$  yazılabilir.

Benzer şekilde,  $V = [3, 5)$ ,  $X$ 'teki alt uzay topolojisine göre açıktır.

Ve

- $U \neq \emptyset$  &  $V \neq \emptyset$

- $U \cap V = \emptyset$

$$U \cup V = X$$



Böylece son konumdan dolayı,

$X, (U, V)$ 'de bağlantısızdır denir.

Not: Örnek<sup>c</sup>'ye baktığımızda önce  $\tau_A$ 'yı hesapladık. Ancak aşağıdaki teorem,  $\tau_A$ 'yı hesaplamadan direkt büyük uzayın (örnek<sup>c</sup>'deki  $X$ ) açıklarına bakarak hesap yapabileceğimizi söyler.

Teorem<sup>2</sup>:  $(X, \tau_X)$  topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  olsun.

$A$  bağlantısızdır  $\Leftrightarrow \exists U \in \tau_X, \exists V \in \tau_X$  uzerinde:

$(A, \tau_A)$ te bağlantısızdır)

$$A \subseteq U \cup V,$$

$$A \cap U \neq \emptyset \text{ ve } A \cap V \neq \emptyset,$$

$$U \cap V \cap A = \emptyset \text{ olur.}$$

İspat.  $\Rightarrow$  :  $A$  bağlantısız olsun. Böylece  $\exists U_A, V_A \in \tau_A$   
 $(A, \tau_A)$ te bağlantısız)



İçerik:  $\rightarrow$  . . . . .  $\forall U_A, V_A \in \mathcal{C}_A$   
(A, X'te bağılırsız)

vardır ki  $U_A \cap V_A = \emptyset$  &  $U_A \cup V_A = A$  olur.

$U_A, V_A \in \mathcal{C}_A$  olduğundan

$U_A = U \cap A, \exists U \in \mathcal{C}_X$  için  
 $V_A = V \cap A, \exists V \in \mathcal{C}_X$  için } alalım.

$$\emptyset = U_A \cap V_A = (U \cap A) \cap (V \cap A) = (U \cap V) \cap A.$$

$$A = U_A \cup V_A = (U \cap A) \cup (V \cap A) = (U \cup V) \cap A$$

$\Downarrow$

$$A = (U \cup V) \cap A$$

$\Downarrow$

$$A \subseteq U \cup V.$$

$\Leftarrow$ : Ödev.

Teorem<sup>3</sup>.  $f: X \rightarrow Y$  sürekli olsun.  $X$  bağlantılı ise  $f(X)$ ,  $Y$ 'de bağlantılıdır.

Sonuç. Bağlantılılık topoloji invariantıdır.  
( $X \approx Y$  ve  $X$  bağlantılı ise  $Y$  de bağlantılıdır.)

ÖRNEK.  $(\mathbb{R}, \tau_s)$  bağlantılı olduğu biliniyor.

$(\mathbb{R}, \tau_e)$  ve  $(\mathbb{R}, \tau_s)$  homeomorf mudur?

Lemma.  $(X, \tau_X)$  topolojik uzay &  $C, D \subseteq X$  olsun.

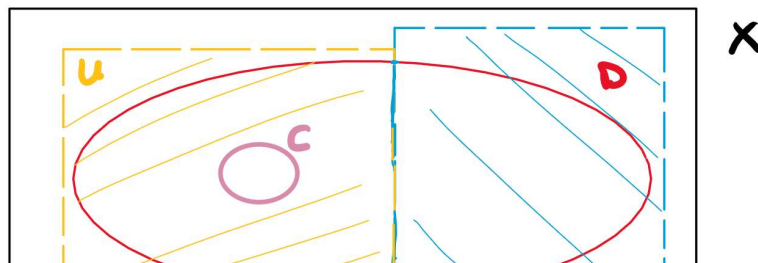
$C \subset D$  &  $C$  bağlantılı olsun.

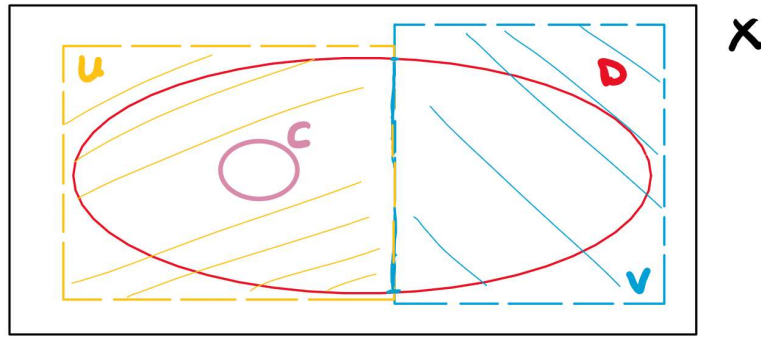
$D$  bağlantısız uzay

Eğer  $U, V \in \tau_X$ ,  $D$ 'nin ayrışmaları ( $D \subseteq U \cup V$ ) ise



$C \subseteq U$  ve ya  $C \subseteq V$  olur.





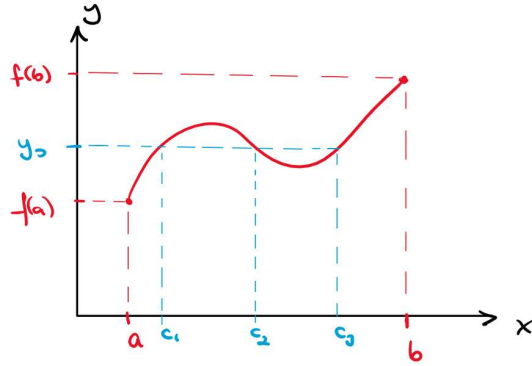
Teorem:  $X_1$  ve  $X_2$  bağlantılı ise  $X_1 \times X_2$  de bağlantılıdır.

## Teorem<sup>5</sup> (Topolojide Ara Değer Teoremi)

Hatırlatma:  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli olsun.

Eğer  $y_0 \in (f(a), f(b))$  ise  $f(c) = y_0$  ol. şet.

$\exists c \in (a, b)$  vardır.



$X$  bağlantılı uzay ve  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli olsun.

↪ standart top. ile.

$p, q \in f(X)$  ve  $p \leq r \leq q$  ise  $r \in f(X)$  olur.

İspat.  $X$  bağlantılı uzay ve  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli olsun.

$p, q \in f(X)$  ve  $p \leq r \leq q$  olsun.

Amaç.  $r \in f(X)$  old. göstermek.

•  $r = p$  ve ya  $r = q$  ise  $r \in f(X)$ . ✓

•  $p < r < q$  olsun.  $r \notin f(X)$  old. varsayalım

- $p < r < q$  olsun.  $r \notin f(X)$  old. varsayalım.

$X$  bağlantılı ve  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli olduğundan  $f(X)$  de bağlantılıdır (Teorem 3'ten).

$U = (-\infty, r)$  ve  $V = (r, \infty) \in \mathcal{T}_\mathbb{R}$  alalım. (i)

$U \cap V = \emptyset$  'nr. (ii)

$f(X) \subseteq U \cup V$  'dir. (iii)

Diğer taraftan,  $p \in U$  ve  $q \in V$  olmak zorda.

$f(X) \cap U \neq \emptyset$  (iv)

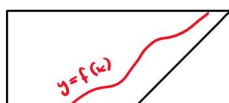
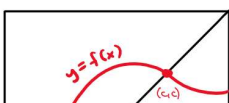
$f(X) \cap V \neq \emptyset$  (v)

- (i)-(v) 'ten dolayı,  $f(X)$  'in bağlantısız old. söyleriz.  $\nabla$   
Varsayımımız yanlıştır.  $r \in f(X)$  olmalı.  $\square$

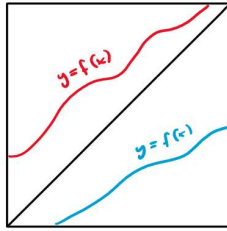
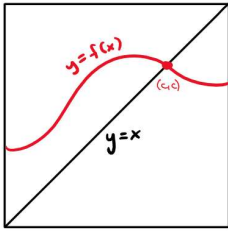
Sonuç. (1-Boyutlu Brouwer Sabit Nokta Teoremi)

$f: [-1,1] \rightarrow [-1,1]$  sürekli olsun. Böylece

$f(c) = c$  ol. set.  $\exists c \in [-1,1]$  vardır.



$f$  dönüştürme,  
 $I(c) = c$  olma olarak



+ dönüşüm,  
 $f(c)=c$  olmayacak  
 şekilde (yani  $y=x$  ile  
 kesişmeyecek şekilde)  
 nasıl çizilir?

İspat.  $f: [-1,1] \rightarrow [-1,1]$  sürekli olsun.

$$g: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = f(x) - x \text{ tanımlayalım.}$$

↓

$g$  süreklidir. **NEDEN?**

$$f(-1) \geq -1 \text{ old. için } g(-1) \geq 0 \text{ olur.}$$

$$f(1) \leq 1 \text{ old. için } g(1) \leq 0 \text{ olur.}$$

↓ Ana Değer Teoreminden

$$\exists c \in [-1,1] \text{ vardır ki } \underline{g(c) = 0} \text{ olur.}$$

↓

$$f(c) - c = 0$$

↓

$$f(c) = c. \quad \square$$

Teorem<sup>6</sup>. (n-Bayutlu Brouwer Sabit Nokta Teoremi)

$f: D^n \rightarrow D^n$  sürekli dönüşümün için  $f(x) = x$  ol. şek.

$\exists x \in D^n$  vardır.

Sonuç.  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli olsun.  $f(c) = f(-c)$  ol. şek.

$\exists c \in S^2$  vardır.

İspat.  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli olsun.

$$g: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = f(x) - f(-x) \quad \text{tanımlayalım.}$$

↓

$g$  süreklidir. **NEDEN?**

Gözetim:  $g(x) = f(x) - f(-x) = -f(-x) + f(x)$

$$= -[f(-x) - f(x)] = -g(-x)$$

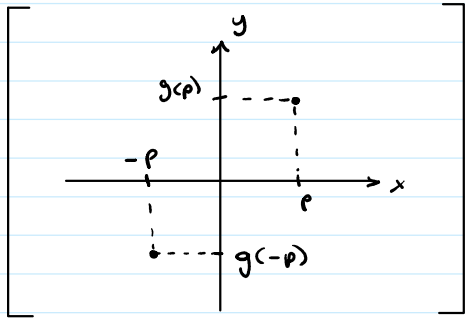
$p \in S^2$  alalım.

Eğer  $g(p) = 0$  ise  $f(p) = f(-p)$  olur.

Eğer  $g(p) \neq 0$  ise  $g(p) = -g(-p)$  old. gözlemledik.

Eğer  $g(p) \neq 0$  ise  $g(p) = -g(-p)$  old. gösterilecek.

$S^2$  bağlantılı old. için, Ara Değer Teoreminde dolayı,  
 $g(-p) \leq 0 \leq g(p)$  için  $\exists q \in S^2$  vardır ki  $g(q) = 0$  olur.



$\Downarrow$

Bundan  $\exists q \in S^2$  için  
 $f(q) = f(-q)$  bulunur.  $\square$

Örnek.  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , Dünya üzerindeki sıcaklık  
fonksiyonu olsun. Bu fonksiyon sürekli dir.

Sonuç'a göre, Dünya yüzeyinde birbirinin zıttı  
(antipodal)  
olan iki noktada sıcaklık aynıdır.

• Aşağıdaki teorem, son Sonuç'un genelleştirilmesidir.

Teorem: (Borsuk-Ulam Teoremi)

$n \geq m$  olm. üzere,  $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  sürekli olsun.

Bu durumda  $f(c) = f(-c)$  ol. şek.  $\exists c \in S^n$  vardır.





Bir topolojik uzay, "en büyük bağlantılı alt kümelerinden" oluşan bir sınıfa parçalanabilir. Bu bölümde bunun hakkında konuşacağız.

Tanım.  $X$  top. uz. üzerinde bir  $\sim_c$  bağıntısı şu şekilde tanımlansın.

$$x \sim_c y : \Leftrightarrow x \text{ ve } y, X \text{'in aynı bağlantılı kümesindedir.}$$

Önerme.  $\sim_c$  denklik bağıntısıdır.

$$(1) x \sim_c x.$$

$$(2) x \sim_c y \Rightarrow y \sim_c x.$$

$$(3) x \sim_c y \text{ ve } y \sim_c z \Rightarrow x \sim_c z.$$

(3) 'ün ispatı.  $x \sim_c y \Rightarrow x, y \in C$  ( $C$ : bağlantılı olm.  $\exists z$ .)  
 $y \sim_c z \Rightarrow y, z \in C'$  ( $C'$ : bağlantılı olm.  $\exists z$ .)

$C \cap C' \ni y$  olduğu için  $C \cap C' \neq \emptyset$ .

O zaman  $C \cup C'$  de bağlantılıdır. Ayrıca  $x, z \in C \cup C'$ .  
 $\nearrow \quad \searrow$

↓  
 $X \sim \mathbb{Z} \cdot \square$

Teorem.  $X$  top. uz. ve  $\{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ,  $X'$  in bağımlı alt kümelerinin  $\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha \neq \emptyset$  şartını sağlayan bir

tokeşiyorsa okun. O zaman  $U_{Ca}$ ,  $X'$ 'te bağlanmıştır.

Tanım.  $X$  bir top. uzay ve  $\sim_c$  yukarıda tanımlanan  
denklik bağıntısı olsun.  $\sim_c$  denklığının denklik sınıflarına  
 $X$ 'in bileşenleri / bağlantılı bileşenleri denir.  
(connected component)

- $X'$ 'in bileşenleri, bu derklik bağantısının derklik sınıfları olduğu için, bu bileşenler  $X'$ 'in bir parçalanışını verirler.  
(partition)
  - Bu bileşenler  $X'$ 'in en geniş bağlantılı alt kümeleridir.
- Aşağıdaki teoremin ilk iki maddesi bunu söyler:

Teoremi<sup>3</sup>.  $X$  bir top. uzay olsun. Bu durumda

Teorem<sup>3</sup>.  $X$  bir top. uzay olsun. Bu durumda

aşağıdaki maddeler sağlanır :

- (i)  $X'$ 'in her bir bileşeni  $X$  içinde bağlantılıdır.
- (ii)  $A$ ,  $X'$ 'te bağlantılı ve  $A$ ,  $X'$ 'in bir bileşeninin alt kümesidir.
- (iii)  $X'$ 'in her bir bileşeni,  $X'$ 'in kapalı bir alt kümesidir.

ÖRNEK.  $(\mathbb{R}, \tau_{fc})$  uzayı bağlantılıdır. (Ödev)

0 zaman,  $(\mathbb{R}, \tau_{fc})$ 'nin tek bir bileşeni vardır,  
o da  $\mathbb{R}'$  dir. Şimdi yukarıdaki maddeleri sağlayalım:

- (i)  $\mathbb{R}, \mathbb{R}'$ 'de bağlantılıdır. ✓
- (ii)  $A = (0, 1)$ ,  $\mathbb{R}'$ 'de bağlantılı olduğundan, bileşende de (yani  $\mathbb{R}'$ 'de) bağlantılıdır. ✓
- (iii)  $\mathbb{R}$  kapalıdır. ✓

ÖRNEK.  $(\mathbb{R}, \tau_e)$  'nin bağlantısız old. gösterdik.

Bileşenlerini bulalım.

İddiamız şudur: Bileşenler tek elemanlı kümelerdir.

Bunu ispatlamak için  $\mathbb{R}$ 'nin minimum 2 elemanlı bir alt kümesinin bağlantısız olduğunu göstereyim.

$A$ ,  $\mathbb{R}$ 'nin  $x$  ve  $y$ 'yi içeren alt kümesi olsun.

$x < y$  olsun.

$x < z < y$  ol. şek.  $\exists z \in \mathbb{R}$  vardır

↙ Arşimet özelliğinin sonucundan

$A \cap (-\infty, z)$  ve  $A \cap [z, \infty)$ ,  $A$ 'nin bir ayrışımıdır.

⇓

0 zaman  $A$  bağlantısızdır.

⇓

$(\mathbb{R}, \tau_e)$ 'de bağlantılı alt kümeler tek elemanlı olmalıdır.  $\square$

Bileşenlerinin kümesi  $\{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$ 'dir.

Şimdi Teorem 8'i uygulatalım.

(i)  $\{x\}$ ,  $(\mathbb{R}, \tau_e)$ 'de bağlantılıdır. ✓

(ii)  $A = \{1\}$ ,  $(\mathbb{R}, \tau_e)$ 'de bağlantılı olduğundan,

$A = \{1\}$ ,  $\{1\}$  bileşeninin alt kümesidir. ✓

(iii)  $\{x\} \subseteq \mathbb{R}$  de kapalıdır (Alt limit topolojisine göre).

$$\text{Çünkü } \{x\}^c = \mathbb{R} - \{x\} = (-\infty, x) \cup (x, \infty).$$

$\tau_1$   $\tau_2$  **NEDEN?**

Teorem<sup>9</sup>.  $f: X \rightarrow Y$  homeomorfizma olsun.

$C$ ,  $X$ 'in bileşeni ise  $f(C)$ ,  $Y$ 'nin bileşenidir.

Bir başka deyişle, homeomorfizma bileşenleri bileşenlere gökür.

•  $\pi_0(X) := X$ 'in bağlantılı bileşenlerinin koleksiyonu.

Teorem<sup>10</sup>  $f: X \rightarrow Y$  sürekli dönüşüm

$f_*: \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$  dönüşümün iletir.

Sonuç.  $f: X \rightarrow Y$  homeomorfizma olsun. Bu durumda

$f_*: \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$  bijektiftir.

Bir başka deyişle,  $X \approx Y$  ise  $\pi_0(X)$  ve  $\pi_0(Y)$ 'nin kardinalitesi aynıdır.

Teorem<sup>11</sup>.  $(\mathbb{R}, \tau_s)$  bağlantılıdır.

İspat. Varsayalım ki  $(\mathbb{R}, \tau_s)$  bağlantılı olsun.

O zaman  $\exists U, V \in \tau_s$  vardır ki,  $U$  ve  $V$ ,  $\mathbb{R}$ 'nin ayrışımıdır.

$u \in U$  ve  $v \in V$  alalım.  $u < v$  olsun.

$U' = U \cap [u, v]$  &  $V' = V \cap [u, v]$  tanımlayalım.

$$\begin{aligned} U' \cup V' &= (U \cap [u, v]) \cup (V \cap [u, v]) \\ &= (U \cup V) \cap [u, v] \\ &= \mathbb{R} \cap [u, v] \\ &= [u, v]. \end{aligned}$$

$U'$  üstten  $v$  ile sınırlı olduğundan  $U'$ 'in en küçük bir üst sınırı vardır (çünkü  $\mathbb{R}$  en küçük üst sınır özelliğini sağlar).

Hatırlatma:

$\mathbb{R}$ 'nin üstten sınırlı her alt kümesinin en küçük bir üst sınırı vardır.



Bu en küçük üst sınıra  $c$  diyelim.

O zaman  $u \leq c$ ,  $c \leq v$  elde edilir.

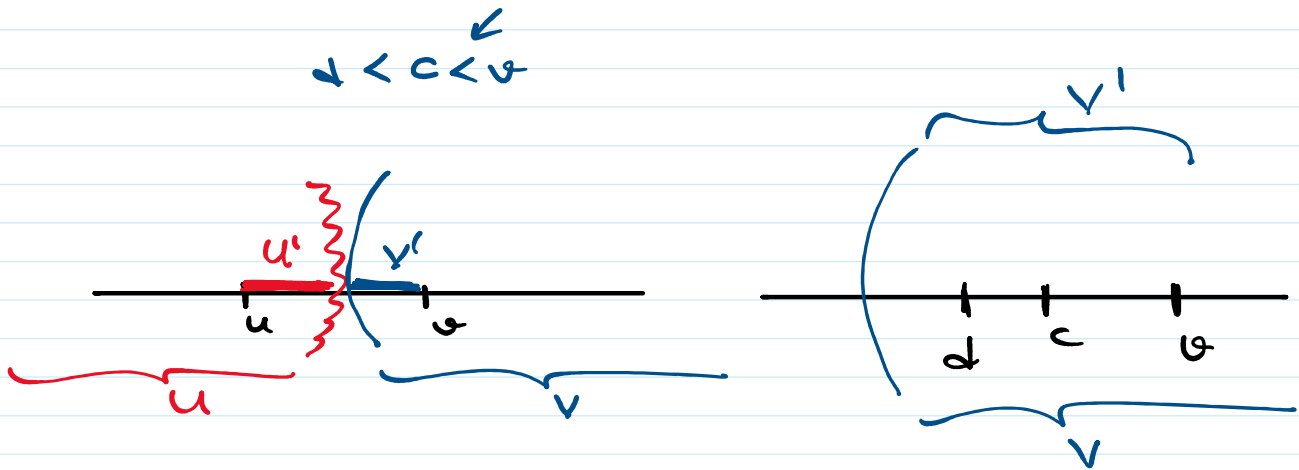
Amaç.  $c \notin U'$  ve  $c \notin V'$  olduğunu gösterirsek

$U' \cup V' = [u, v]$  ile çelişir!

Varsayalım ki  $c \in V'$  olsun.

$V' \subset [u, v]$  açık olduğundan  $V'$ 'nin her noktası iç noktadır. Özel olarak,  $c \in V'$  old. için  $c$  iç noktadır.

Böylece  $\exists (d, e] \in \mathcal{U}(c) : (d, e] \subset V'$  olur.



Burada  $d$ 'nin  $U'$ 'nin bir üst sınırı olduğunu görüyoruz. Ve  $d < c$  'dir. Oysa  $c$ 'ye  $U'$ 'nin en küçük üst sınırı deniştik. Varsayım yanlış.  $\nabla$

$\Downarrow$   
 $c \in U'$  olmalı.

$\Downarrow$   
 $c \in U'$  olmalı.

Şimdi de  $c \notin U'$  olduğunu gösterelim. Varsayalım ki  $c \in U'$  olsun ( $c$ 'nin  $U'$ 'nin en küçük üst sınırı olduğunu unutma).

$U'$ ,  $[T_u, \sigma]$ 'de açık. O zaman  $U'$ 'nin noktaları iç nokta. Özel olarak,  $c$  de iç nokta.

O zaman  $\exists T_u, d) \in U(c) : T_u, d) \subset U'$  olur.

Bu durumda,  $c$   $U'$  için bir üst sınır değildir.  $\nabla$

Sonuç olarak, ilk varsayımımız yanlıştır.

$(\mathbb{R}, \tau_S)$  bağlantılı olmalıdır.  $\square$

Sonuç.  $(\mathbb{R}^n, \tau_S)$  bağlantılıdır.

Teorem<sup>12</sup>.  $S^n$  (standart top. ile verilsen) bağlantılıdır.

İspat.  $S^2$  için ispatlayalım.  $S^n$  için mantık aynı.

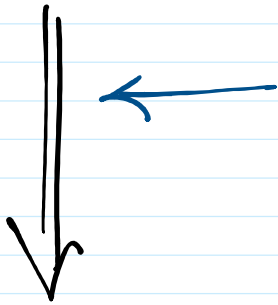
Örnek:  $\mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 - \{N\}$  stereografik izdüşüm alalım.

$p: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 - \{N\}$  stereografik izdüşüm alalım.

$p$  homeomorfizmadır - biliniyor.

$\mathbb{R}^2$  bağlantılı olduğu için  $f(\mathbb{R}^2) = S^2 - \{N\}$  de bağlantılıdır. f örter

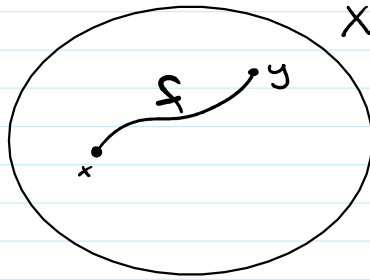
Diğer taraftan,  $cl(S^2 - \{N\}) = S^2$  'dir.



Teorem.  $C, X$ 'te bağlantılı  
ve  $C \subseteq A \subseteq cl(C)$  olsun.  
Böylece  $A, X$ 'te bağlantılıdır.

Böylece  $S^2$  de bağlantılıdır.  $\square$

Tanım.  $f: I \rightarrow X$  sürekli dönüşüm olsun ve  $f(0)=x$ ,  $f(1)=y$  sağlansın. Bu durumda  $f$ 'ye  $X$ 'te  $x$ 'ten  $y$ 'ye **yol** denir.



Tanım:  $\forall x, y \in X$  için,  $X$  içinde  $x$ 'ten  $y$ 'ye giden bir yol bulunabiliyorsa,  $X$ 'e **yol bağlantılıdır** denir.

ÖRNEK.  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$  yol bağlantılıdır.

$\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}$  alalım.

Amaç.  $x_0$ 'den  $x_1$ 'e,  $\mathbb{R}$ 'de bir yol kurmak.

$$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \alpha(t) = (1-t)x_0 + tx_1 \text{ tanımlayalım.}$$

•  $\alpha$  sürekli dir. **NEDEN?**

$$\alpha(0) = (1-0) \cdot x_0 + 0 \cdot x_1 = x_0$$

$$\alpha(1) = (1-1) \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 = x_1$$

ÖRNEK.  $\mathbb{R}^n$ ,  $n$ -disk, açık  $n$ -disk yol bağlantılıdır.

↖ (standart lp. ile verilsin)

**Teorem<sup>13</sup>**  $X$  yol bağlantılı ise bağlantılıdır.

İspat.  $X$  yol bağlantılı olsun. Fakat varsayalım ki

$X$  bağlantılı olmasın. Bu durumda  $\exists U, V \subseteq X$  açık  
 $\emptyset \neq U, \emptyset \neq V$   
vardır ki  $U \cap V = \emptyset$  ve  $U \cup V = X$  olur.

$x \in U$  ve  $y \in V$  alalım.

$X$  yol bağlantılı olduğu için  $\exists \alpha: I \rightarrow X$  sürekli dñ.

vardır ki  $\alpha(0) = x$ ,  $\alpha(1) = y$  olur.

$X = U \cup V$  old. için  $[0,1] = \alpha^{-1}(X) = \alpha^{-1}(U \cup V)$  dir. (i)

$\emptyset = U \cap V \implies \emptyset = \alpha^{-1}(\emptyset) = \alpha^{-1}(U \cap V) = \alpha^{-1}(U) \cap \alpha^{-1}(V)$  (ii)

elde edilir.

Ayrıca  $\alpha$  sürekli olduğundan  $\alpha^{-1}(U), \alpha^{-1}(V) \subseteq I$  açıktır. <sup>(ii)</sup>

$x \in U$  ve  $\alpha(0) = x$  olduğun  $\alpha^{-1}(U) \ni 0$  olur.

$$\downarrow$$
$$\alpha^{-1}(U) \neq \emptyset. \quad (iv)$$

Benzer şekilde  $\alpha^{-1}(V) \neq \emptyset$  bulunur. <sup>(v)</sup>

Böylece (i)-(v) 'leri dılayı  $I$  bağlantısız bulunur.  $\nexists$

Varsayım yanlış.  $X$  bağlantılı olmak zorunda.  $\square$

NOT: Bağlantılı ise yol bağlantılı olmak zorunda değil.

ÖRNEK. (Bağlantılı olup yol bağlantılı olmayan uzay:  
Topologistin sinüs eğrisi)

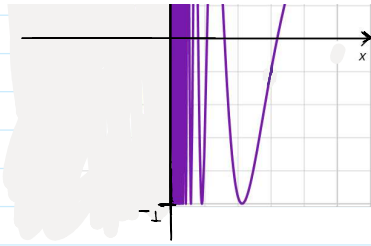
Topologistin sinüs eğrisi:

$$T = \underbrace{\left\{ (x, \sin \frac{1}{x}) \mid 0 < x \leq 1 \right\}}_A \cup \underbrace{\left\{ (0, y) \mid -1 \leq y \leq 1 \right\}}_B.$$



$x = (0,0)$  ve  $y = (\frac{1}{\pi}, 0)$   
 $x \in A$  ve  $y \in B$  alalım. Sezgisel olarak,

$x$ 'ten  $y$ 'ye yol olmadığı görünür.



^ m y r y s i m i n e g i g e r e .

Şimdi bunu ispatlayalım.

Varsayalım ki  $\exists \alpha: I \rightarrow T$  yol olsun.

( $\alpha(0) = (0,0)$  ve  $\alpha(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$  olm.  $\forall \alpha$ .)

$F: I \rightarrow \mathbb{R}$  şu şekilde tanımlansın:

$$F: I \xrightarrow{\alpha} T \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{R} \quad (\pi_1: 1. \text{ bileşene izdüşüm})$$

$\alpha$  ve  $\pi_1$  sür. olduğundan  $F$  de süreklidir.

Ayrıca  $F(0) = \pi_1 \circ \alpha(0) = \pi_1(0,0) = 0$  ve

$$F(1) = \pi_1 \circ \alpha(1) = \pi_1\left(\frac{1}{\pi}, 0\right) = \frac{1}{\pi}.$$

•  $\frac{2}{3\pi} \in [0, \frac{1}{\pi}]$  için, Ara Değer Teoreminden

$\exists t_1 \in I$  vardır ki  $F(t_1) = \frac{2}{3\pi}$  olur.

•  $\frac{2}{5\pi} \in [0, \frac{2}{3\pi}]$  için, Ara Değer Teoreminden

$\exists t_2 \in [0, t_1]$  vardır ki  $F(t_2) = \frac{2}{5\pi}$  olur.

...

$\exists \{t_n\}$  dizisi bulduk ki

$$t_{n+1} \in [0, t_n] \text{ ve } F(t_n) = \frac{2}{(2n+1)\pi}.$$

$\{t_n\}$  dizisi monoton azalan ve alttan sınırlıdır.

Böylece  $\{t_n\}$  yakınsaktır.  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$  diyelim.

$\alpha$  sürekli olduğundan  $\{\alpha(t_n)\}$  dizisi  $\alpha(t)$ 'ye yakınsar.

Diğer taraftan  $\alpha(t_n) = \left( \frac{2}{(2n+1)\pi}, (-1)^n \right)$  'dır ve

$\{\alpha(t_n)\}$  yakınsak değildir.

$\sin \frac{(2n+1)\pi}{2}$



Hatırlatma.  $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$  sürekli olsun.  
 $X$ 'teki  $x_n \rightarrow x$  ise  $Y$ 'deki  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  olur.

Böylece  $F$  sürekli değildir.  $\nabla$

Yarışayım hatalı.  $x$ 'ten  $y$ 'ye bir yol yoktur.



Yarşayım hatalı.  $x'$ 'ter  $y'$ 'ye bir yol yoktur.  
 $(0,0)$   $(\frac{1}{\pi},0)$

En az bir  $(x,y)$  ikilisi için  $x'$ 'ter  $y'$ 'yen yol bulamazlık.  
 $\Downarrow$

$X$  yol bağlantılı değildir.

Şimdi de  $X'$ 'in bağlantılı olduğunu göstereyim.

Öncelikle şunu gözlemleyelim:

$X'$ 'i bağlantısız yapacak şekilde  $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$  açıkları bulunamayacağını göstereceğiz. Eğer diye bir  $x \in \mathbb{R}^+$

için  $(x, \sin \frac{1}{x}) \in U$  ise o zaman tüm  $x \in \mathbb{R}^+$

için  $(x, \sin \frac{1}{x}) \in U$  olur.

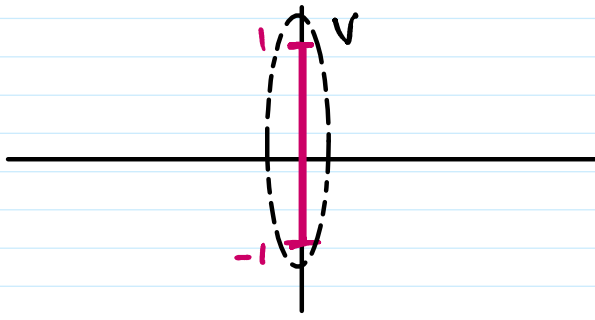
Böylece  $U'$ 'yu  $A'$ 'yı içeren  $\mathbb{R}^2$ 'deki açık olarak alalım.

$V'$ 'yi de  $B'$ 'yi içeren  $\mathbb{R}^2$ 'de açık alalım.

$$X \subseteq U \cup V \quad \checkmark$$

$$X \cap U \neq \emptyset \quad \& \quad X \cap V \neq \emptyset \quad \checkmark$$

fakat  $X \cap U \cap V \neq \emptyset$ .  $\rightarrow$  Çünkü



$V \subseteq \mathbb{R}^2$  açıq ne kadar  
küçük olursa olsun,

yeterince büyük bir  $n \in \mathbb{Z}^+$

için  $(\frac{1}{n\pi}, \sin(n\pi))$  noktasını içerir ve bu

nokta  $A$ 'nın da (dolayısıyla  $U$ 'nun da) elemanıdır.

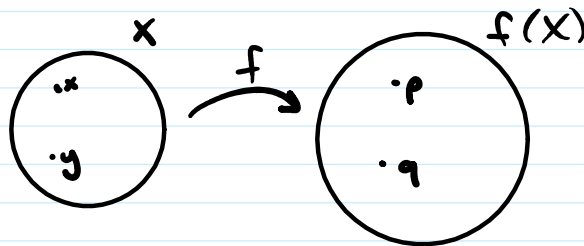


Böylece  $X$  bağlantılıdır.  $\square$

Teorem <sup>14</sup>.  $X$  yol bağlantılı ve  $f: X \rightarrow Y$  sürekli ise  
 $f(X)$  de yol bağlantılıdır.

İspat.  $p, q \in f(X)$  alalım.

$x \in f^{-1}(p)$  ve  $y \in f^{-1}(q)$  alalım.



$X$  yol bağlantılı ol. için  $\exists \alpha: I \rightarrow X$  yolu vardır.

$$0 \mapsto x$$

$$1 \mapsto y$$

$$f \circ \alpha: I \longrightarrow X \longrightarrow f(X)$$

$$0 \longmapsto f(\alpha(0)) = f(x) = p$$

$$1 \longmapsto f(\alpha(1)) = f(y) = q$$

$f \circ \alpha$  sürekli. Böylece,  $f \circ \alpha$   $p$ 'den  $q$ 'ya bir yoldur.  $\square$

Sonuç. Yol bağlantılı olma topoloji invariantıdır.

Teorem.  $X_1$  ve  $X_2$  yol bağlantılı ise  $X_1 \times X_2$  de yol bağlantılıdır.

İspat. (Ödev)

Bağlantılılıkta olduğu gibi,  $X$  uzayı "en büyük yol bağlantılı alt kümelerine" parçalanabilir. Bu kümelere  $X$ 'in yol bileşenleri denir.

Tanım.  $X$  uzayında  $\sim_p$  bağıntısını şu şekilde tanımlayalım:

$$x \sim_p y : \Leftrightarrow \exists \gamma: I \rightarrow X \text{ yol vardır ki} \\ \gamma(0)=x \text{ ve } \gamma(1)=y \text{ olur.}$$

Önerme.  $\sim_p$  denklik bağıntısıdır.

İspat. •  $x \sim_p x$ . Çünkü  $\gamma: I \rightarrow X$ ,  $\gamma(x)=x$  sabit dñ. vdr.

•  $x \sim_p y \Rightarrow y \sim_p x$ . Çünkü

$x \sim_p y$  oldu için  $\exists \alpha: I \rightarrow X$ ,  $\alpha(0)=x$  ve  $\alpha(1)=y$ , vardır.

$\beta: I \rightarrow X$  tanımlayalım.  
 $t \mapsto \beta(t) = \alpha(1-t)$

$\beta$  sürekli. NEDEN?

$$\beta(0) = \alpha(1-0) = y \quad \& \quad \beta(1) = \alpha(1-1) = \alpha(0) = x.$$

Böylece  $y \sim_p x$  bulunur.

•  $x \sim_p y$  ve  $y \sim_p z \Rightarrow x \sim_p z$ . Çünkü

$$x \sim_p y \Leftrightarrow \exists \alpha: I \rightarrow X \text{ yol}, \alpha(0) = x, \alpha(1) = y.$$

$$y \sim_p z \Leftrightarrow \exists \beta: I \rightarrow X \text{ yol}, \beta(0) = y, \beta(1) = z.$$

$\gamma: I \rightarrow X$  dönüşümünü şu şekilde tanımlayalım:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

- Pasting lemma'dan dolayı  $\gamma$  sürekli.

$$- \gamma(0) = \alpha(2 \cdot 0) = x$$

$$\gamma(1) = \beta(2 \cdot 1 - 1) = \beta(1) = z.$$

Böylece  $x \sim_p z$  elde edilir.  $\square$

Tanım.  $\sim_p$  bağıntısının denklik sınıflarına  $X$ 'in yol bileşenleri denir.  
(path component)

- $X$ 'in yol bileşenleri yol bağlantılıdır.
- $X$ 'in her yol bağlantılı alt kümesi,  $X$ 'in bir yol bileşeninin alt kümesidir.



Bu yüzden  $X$ 'in yol bileşenleri,  $X$ 'in en büyük yol bağlantılı alt kümeleridir.

ÖRNEK.  $(\mathbb{R}, \tau_s)$  uzayı verilsin.

$X = (1, 2] \cup [3, 5)$  uzayının  $\mathbb{R}$ 'de bağlantısız olduğunu gösterelim. Böylece  $X$  yol bağlantılı da değildir.

↗  
[Teorem:  $X$  yol bağlantılı  $\Rightarrow X$  bağlantılı.]

Diğer taraftan,  $(1,2]$ ,  $X'$ 'te yol bağlantılıdır  
ve  $[3,5)$ ,  $X'$ 'te yol bağlantılıdır.

Hatta  $(1,2]$ 'den daha büyük ve yol bağlantılı  
olan,  $X'$ 'te yol bağlantılı uzay yoktur. Benzer şekilde  
 $[3,5)$  için de aynı şey söylenir.

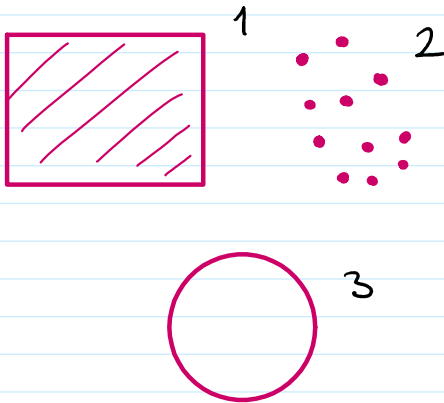
Bu durumda  $(1,2]$  ve  $[3,5)$ ,  $X'$ 'in yol bileşenleridir.

## MOTIVASYON

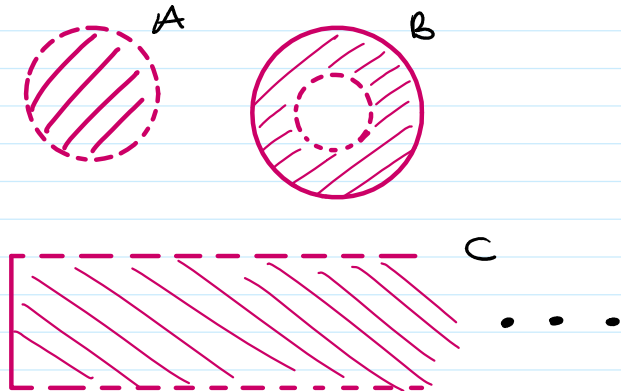
Aşağıda  $\mathbb{R}^2$ 'nin ve  $\mathbb{R}$ 'nin kompakt ve kompakt olmayan alt kümeleri verilmiştir.

"kompaktlık" konusunda amacımız bu iki taraf arasındaki farklılığı sistematik bir şekilde turmaktır.

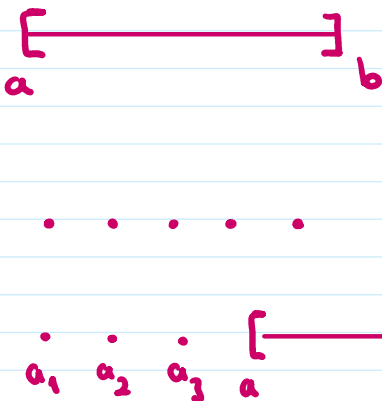
$\mathbb{R}^2$ 'nin Kompakt Alt Kümeleri



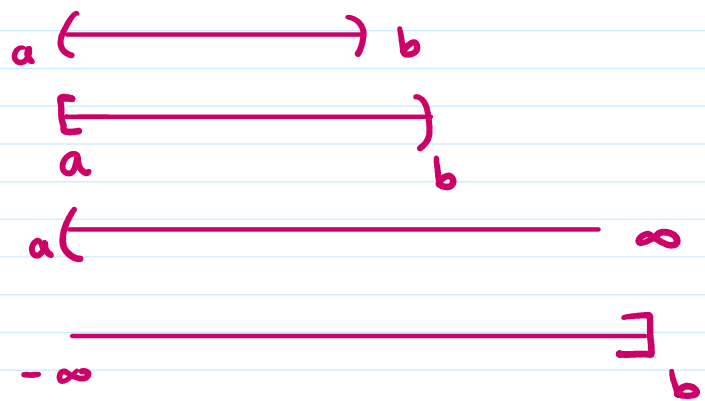
$\mathbb{R}^2$ 'nin Kompakt Olmayan Alt Kümeleri



$\mathbb{R}$ 'nin Kompakt Alt Kümeleri



$\mathbb{R}$ 'nin Kompakt Olmayan Alt Kümeleri





Kompakt olanların ortak özelliği: Sınırlı olmaları.

- Peki sadece sınırlı olan uzaylar kompakttır denebilir mi?

HAYIR! ① da sınırlı fakat kompakt DEĞİL.

- Kompakt olma ve sonlu elemanlı olma aynı değildir.  
② sonlu elemanlı ama ① ve ③ değil.

NOT: Yukarıdaki kompakt uzayların bir başka ortak özelliği hepsinin  $\mathbb{R}^n$ 'in kapalı alt kümeleri olmalarıdır.



DİKKAT: Yukarıdaki bilgiler sadece  $\mathbb{R}^n$ 'de standart topoloji ve standart metrik alındığında geçerlidir.

Spoiler : (Heine - Borel Teoremi)

$\mathbb{R}^n$  üzerinde  $\tau_S$  ve  $d_S$  verilsin.

$A \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakttır.  $\Leftrightarrow A$  sınırlı ve kapalı.

Herhangi bir uzayda kompaktlık tanımını vermek

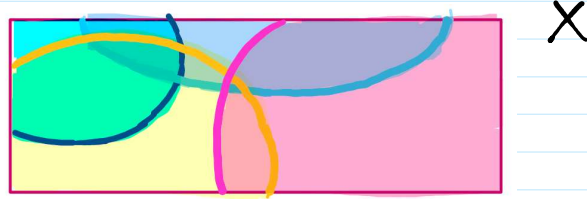
için önce örneği tanımlayalım.

## Tanım. ( $\mathcal{O}r\mathcal{N}$ - Açık $\mathcal{O}r\mathcal{N}$ - Alt $\mathcal{O}r\mathcal{N}$ )

$X$  bir topolojik uzay olsun.  $\mathcal{E}$ ,  $X$ 'in alt kümelerinin bir koleksiyonu olsun.

i)  $X = \bigcup_{C \in \mathcal{E}} C$  oluyorsa,  $\mathcal{E}$ 'ye  $X$ 'in bir  $\mathcal{O}r\mathcal{N}$  veya

$\mathcal{E}$ ,  $X$ 'i  $\mathcal{O}r\mathcal{N}$  denir.



$X$ 'in bir  $\mathcal{O}r\mathcal{N}$

ii) Eğer (i)'deki  $C_\alpha$ 'lar açık ise  $\mathcal{E}$ 'ye  $X$ 'in  $\mathcal{O}r\mathcal{N}$  denir.

iii)  $\mathcal{E}$ ,  $X$ 'i  $\mathcal{O}r\mathcal{N}$  ve  $\bar{\mathcal{E}}$ ,  $\mathcal{E}$ 'nin  $X$ 'i  $\mathcal{O}r\mathcal{N}$  bir alt koleksiyonu olsun. Bu durumda  $\bar{\mathcal{E}}$ 'ye  $\mathcal{E}$ 'nin  $\mathcal{O}r\mathcal{N}$  denir.

↓ (Daha genel tanım)

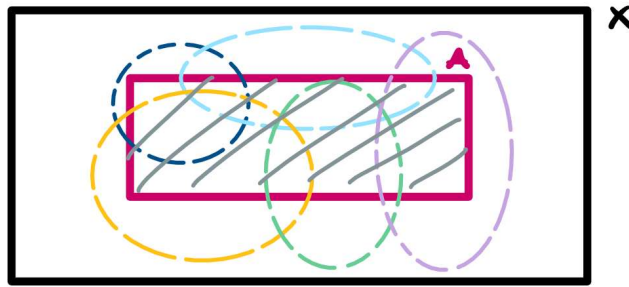
Tanım.  $X$  topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  alt uzay olsun.

$\mathcal{E}$ ,  $X$ 'in alt kümelerinin bir koleksiyonu olsun.

i)  $A \subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{E}} C$  oluyorsa,  $\mathcal{E}$ 'ye  $A$ 'nın bir **örtüşü**

veya  $\mathcal{E}$ ,  $A$ 'yı **örtür** denir.

ii) Eğer (i)'deki  $C_\alpha$ 'lar açık ise  $\mathcal{E}$ 'ye  $A$ 'nın **açık örtüşü** denir.



$A$ 'nın açık örtüşü

iii)  $\mathcal{E}$ ,  $A$ 'yı örtse.  $\bar{\mathcal{E}}$ ,  $\mathcal{E}$ 'nin  $A$ 'yı örtür bir alt koleksiyonu olsun. Bu durumda  $\bar{\mathcal{E}}$ 'ye  $\mathcal{E}$ 'nin **( $A$ 'yı örtür) alt örtüşü** denir.

ÖRNEK.  $X = \{a, b, c, d, e\}$  kümesi üzerinde

$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{c, d, e\}, \{b, c\}, \{c\}, \{a, c, d, e\},$

$$\tau = \{ X, \emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{b, c\}, \{c\}, \{a, c, d, e\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d, e\} \}$$

topolojisi verilsin.

1)  $\mathcal{C} = \{ \{a\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d, e\} \}$ ,  $X$ 'in açık örtüsü.

$\bar{\mathcal{C}} = \{ \{a, b, c\}, \{a, c, d, e\} \}$ ,  $\mathcal{C}$ 'nin alt örtüsü.  
( $X$ 'i örten)

(Hatta  $\nwarrow$  açık alt örtüsü)

$\mathcal{D} = \{ \{b\}, \{a, c, d, e\} \}$ ,  $X$ 'in örtüsü  
fakat açık örtü değil!

2)  $A = \{c, d, e\} \subseteq X$  alalım.

•  $\mathcal{C}_1 = \{ \{a, c\}, \{c, d, e\} \}$  verilsin.

$A \subseteq \{a, c\} \cup \{c, d, e\}$  &  $\{a, c\}, \{c, d, e\} \in \tau$ .

$\Downarrow$

$\mathcal{C}_1$ ,  $A$ 'nın açık örtüsü.

•  $\mathcal{C}_2 = \{ \{b, c, d, e\} \}$  verilsin.

$A \subseteq \{b, c, d, e\}$  &  $\{b, c, d, e\} \in \tau$ .

$\Downarrow$

$\Downarrow$   
 $\mathcal{C}_2, A$ 'nin açık örneği.

•  $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1$ 'in alt örneği değildir.

•  $\overline{\mathcal{C}}_1 = \{\{c, d, e\}\}$  alalım.

$\overline{\mathcal{C}}_1, \mathcal{C}_1$ 'nin ( $A$ 'yı örten) alt örneğidir.

•  $\mathcal{C}_3 = \{X\}$  verilsin.

$A \subseteq X$  ve  $X \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C}_3, A$ 'nin açık örneğidir.

•  $\mathcal{C}_4 = \{\{a, b, c\}, \{b, c\}\}$  verilsin.

$$A = \{c, d, e\} \not\subseteq \{a, b, c\} \cup \{b, c\}$$

$\Downarrow$

$\mathcal{C}_4, A$ 'nin örneği değil.

•  $\mathcal{C}_5 = \{\{a, b, d\}, \{c, d, e\}\}$  verilsin.

$$A = \{c, d, e\} \subseteq \{a, b, d\} \cup \{c, d, e\}$$

Fakat  $\{a, b, d\} \notin \mathcal{C}$

$\Downarrow$

✓✓

$\mathbb{Q}_5$ ,  $A'$ 'nin açık örtüsü değildir.

(Fakat  $\mathbb{Q}_5$ ,  $A'$ 'nin örtüsüdür)



ÖRNEK.  $(X, \tau_{\text{diskret}})$  verilsin.

$e = \{x\}$ ,  $X$ 'in bir açık örneğidir.

NOT: Yukarıdaki örnekte,  $e$  aslında  $(X, \tau_{\text{diskret}})$  için bir bazdır. Aslında,  $X$ 'in herhangi bir bazı  $X$ 'in bir açık örneğidir.

Tanım.  $X$  uzayının tüm açık örneğlerinin sonlu bir alt örneği varsa  $X$ 'e kompakt denir.

ÖRNEK.  $(\mathbb{R}, \tau_s)$  kompakt değildir.

$\mathbb{R}$ 'nin  $e = \{ \dots, (-1, 1), (0, 2), (1, 3), \dots \} = \{ (n, n+2) \}_{n \in \mathbb{Z}}$  açık örneğini alalım.

$e$ 'nin hiçbir alt örneği  $\mathbb{R}$ 'yi örtemez. Yani,  $e$ 'den herhangi bir  $U_n$  çıkarılırsa geriye kalan  $U_n$ 'ler  $\mathbb{R}$ 'yi örtemez.

Tanım.  $X$  topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  olsun.

$A, X'$ 'te kompakttır.  $:\Leftrightarrow A, X'$ 'ten gelen alt uzay topolojisine göre kompakttır.

Herhangi  $\mathcal{C}_A = \{U \cap A \mid U \subseteq X \text{ açık}\}$   
( $A$ 'nin  $\mathcal{C}_X$ 'sünün) sonlu alt  $\mathcal{C}_A$ 'si vardır.

- Aşağıdaki lemma, " $A$ 'nin  $X$ 'te kompakt" olduğunu araştırırken  $A$ 'daki açıkları kullanmak yerine  $X$ 'in açıklarını da kullanabileceğimizi söyler.

Lemma.  $X$  topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  olsun.

$A, X$ 'te kompakttır.  $\Leftrightarrow X$ 'in açıkları ile oluşturulan  $A$ 'nın tüm  $\mathcal{C}_X$ 'lerinin sonlu bir alt  $\mathcal{C}_X$ 'si vardır.

$\mathcal{C} = \{U \mid U \subseteq X \text{ açık}\}$ ,  $A$ 'nin açık  $\mathcal{C}_X$ 'si olsun.

$\mathcal{C}$ 'nin sonlu  $\bar{\mathcal{C}} = \{U_i \mid U_i \in \mathcal{C} \text{ ve } i=1, \dots, n\}$

$e'$ 'nin sonlu  $e = \{U_i \mid U_i \in e \text{ ve } i=1, \dots, n\}$   
 vardır ki  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$  olur.

İspat.  $\Rightarrow$ :  $A$ ,  $X'$ 'te kompakt olsun. Tanımdan dolayı,  
 $A'$ 'daki alt uzay topolojisine göre  $A$  kompakttır.

Amaç.  $e$ ,  $X'$ 'in açıkları ile oluşturulan  $A'$ 'nin herhangi  
 bir örtüsü ise  $e'$ 'den sonlu bir alt örtü çıkarmak.

$e$ ,  $X'$ 'in açıkları ile oluşturulan  $A'$ 'nin bir örtüsü olsun.

$e = \{U \mid U \subseteq X \text{ açık}\}$  ve  $A \subseteq \bigcup_{U \in e} U$  olur.

$e' = \{U \cap A \mid U \in e\}$  alalım.  $A$ ,  $X'$ 'te kompakt olduğundan,  
 $e'$ 'nin sonlu alt örtüsü  $\{U_1 \cap A, \dots, U_n \cap A\}$  vardır.

Burada  $\{U_1, \dots, U_n\}$ ,  $e'$ 'nin sonlu alt koleksiyonudur  
 ve  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$  sağlar. Böylece  $e'$ 'nin  $A'$ 'yı örten  
 açık bir alt örtüsünü bulmuş oluruz.

$\Leftarrow$ : Ödev.  $\square$

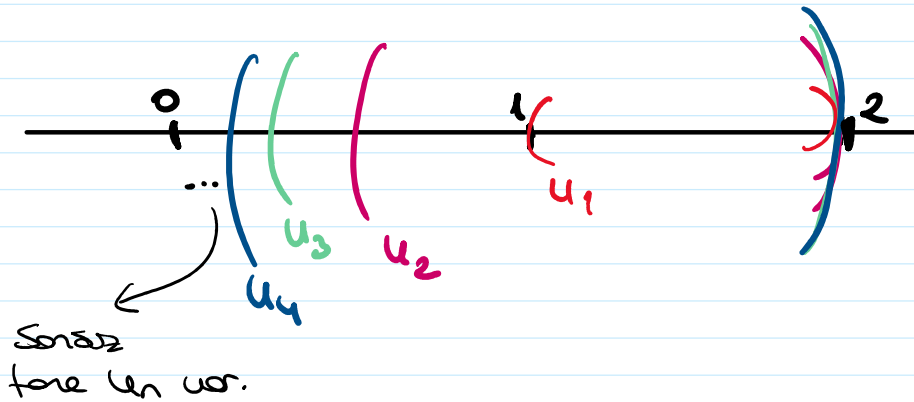
Standard top. ile verilir.

ÖRNEK.  $(0,1] \subseteq \mathbb{R}$  standart top. ile verilir.

$(0,1]$  için  $\mathcal{e} = \{(\frac{1}{n}, 2) \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$  açık örtüşümlü alalım.

$\mathbb{R}$ 'nin açıkları ile duvarlım.

$\mathcal{e}$ 'nin  $(0,1]$ 'i örter sonlu alt örtüşümlü yoktur. NEDEN?



ÖRNEK.  $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$   $\mathbb{R}$ 'de kompaktır.

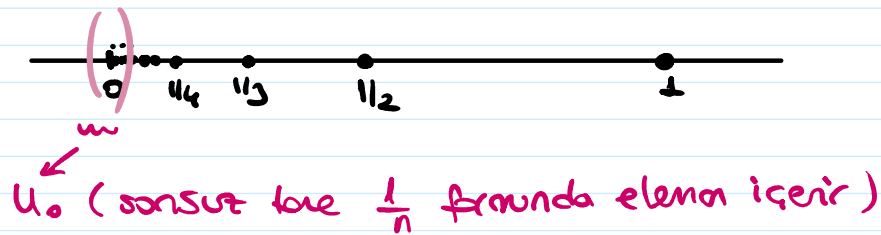
$\mathcal{e} = \{U \mid U \subseteq \mathbb{R} \text{ açık} \text{ ve } A \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{e}} U \text{ olsun.}$

$\exists U_0 \in \mathcal{e}$  vardır ki  $0 \in U_0$  olur.

(Çünkü  $\mathcal{e}$ ,  $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ 'i örter)

- Eğer  $U_0$ ,  $A'$ 'nin  $k$ 'm elemanlarını içeriyorsa  
 $e' = \{U_0\}$ ,  $A'$ 'yi öten sonlu alt küredir.

- Eğer  $U_0$ ,  $A'$ 'daki  $k$ 'm noktaları içermiyorsa,  
 $U_0$ 'ı ne kadar küçük seçerseniz seçin,  $U_0$   $A'$ 'nin  
 sonsuz tane elemanını içerir.



Bunu matematiksel olarak şöyle yazabiliriz:

$\frac{1}{m}$ ,  $U_0$ 'ın dışında kalan,  $A'$ 'daki en küçük

eleman olsun. Bu durumda  $\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+2}, \dots \in U_0$  olur.

$A'$ 'daki her bir  $\frac{1}{i}$  noktası için  $e'$ 'de  $\frac{1}{i}$ 'yi içeren  
↖  $U_0$  dışında kalan

bir  $U_i$  açık kümesi vardır (çünkü  $e$ ,  $A'$ 'yi örter).

O zaman  $\bar{e} = \{U_0, U_1, \dots, U_n\}$ ,  $e'$ 'nin sonlu bir

Orkssjór. II

Teorem<sup>1</sup>.  $f : X \rightarrow Y$  sürekli ve  $A, X$ 'te kompakt olsun. Böylece  $f(A)$  da kompakttır.

Sonuç<sup>1</sup>. Kompaktlık topoloji invariantıdır.

Sonuç<sup>2</sup>. Kompakt  $X$  uzayının bölüm uzayı da kompakttır.

İspat (Sonuç<sup>2</sup>).  $p : X \rightarrow X/\sim$  bölüm dönüşümü  
sürekli dir. Ayrıca  $p$  örten olduğundan,  
 $p(X) = X/\sim$  ' dir. Böylece  $X$  kompakt old.,  
Teorem<sup>1</sup>' den dolayı  $X/\sim$  da kompakttır.

ÖRNEK. Torus kompakttır.

$(x,0) \sim (x,1)$  ve  $(0,y) \sim (1,y)$  olmak üzere

$\text{Torus} = \mathbb{I} \times \mathbb{I} / \sim$  olur.

$\mathbb{I} \times \mathbb{I}$  kompakttır. (Daha sonra anlatılacak)

Torus,  $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$  'in bölüm uzayı olduğundan,

Sonuç<sup>2</sup> 'den dolayı Torus da kompakttır.

ÖRNEK. Benzer şekilde  $S^1$ , Möbius şeridi ve Klein şişesinin kompakt old. söylenir.

ÖRNEK.  $(\mathbb{R}, \tau_s)$  'in kompakt olmadığını biliyoruz.

Diğer taraftan,

$(a, b) \approx (a, \infty) \approx (-\infty, a) \approx \mathbb{R}$  olduğunu da biliyoruz.

Kompaktlık topoloji invariantı old. için

$(a, b)$ ,  $(a, \infty)$ ,  $(-\infty, a)$  da kompakt değildir.

↙ standart top. ile verilsin.

ÖRNEK.  $(0, 1]$  uzayının kompakt olmadığını biliyoruz.

Diğer taraftan,

$(a, b] \approx (-\infty, a_1] \approx [a_2, \infty) \approx [c, d) \approx (0, 1]$

olduğunu da biliyoruz.

Kompaktlık topoloji invariantı old. için

$(a, b]$ ,  $(-\infty, a_1]$ ,  $[a_2, \infty)$ ,  $[c, d)$  da kompakt değildir.

NOT:  $[a, b]$  kompakttır. (Heine-Borel Teoreminden /



NOT:  $[a, b]$  kompakttır. (Heine-Borel Teoreminden / sonra orlatılacaktır)

Teorem<sup>4</sup>.  $X$  kompakt uzay olsun.

$A \subseteq X$  kapalı ise  $A$  kompakttır.

NOT: Tersini her zaman doğru değildir.

ÖRNEK. (Tersinin doğru olmadığına dair örnek)

$X = \mathbb{R}$  ve  $\tau_{\text{ind}} = \{\mathbb{R}, \emptyset\}$  verilsin.

$(\mathbb{R}, \tau_{\text{ind}})$  kompakttır. Çünkü bu uzaydaki tek açık örtü, bir elemanlı olan  $\mathcal{C} = \{\mathbb{R}\}$ 'dir.

Ve  $\mathcal{C}$ 'nin sonlu alt örtüsü bulunabilir (yani kendisi).

$A = \{0\}$ ,  $(\mathbb{R}, \tau_{\text{ind}})$ 'de kompakttır. Çünkü  $\mathcal{C} = \{\mathbb{R}\}$ ,  $A$ 'yı örter ve bu örtüler sonlu alt örtü çıkarılabilir (yani  $\mathcal{C}$ 'nin kendisi).

Fakat  $A = \{0\}$ ,  $(\mathbb{R}, \tau_{\text{ind}})$ 'de kapalı değildir.

ÖRNEK.  $X = [5, 100]$  kompakttır.

$A = [10, 13] \subseteq X$  kapalıdır. Teorem<sup>4</sup>'ten dolayı,

$A$  da kompakttır.

Teorem<sup>5</sup>.  $X$  Hausdorff olsun.

$A \subseteq X$ 'te kompakt ise  $A$  kapalıdır.

ÖRNEK.  $(\mathbb{R}, \tau_s)$  Hausdorff ve  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ 'de kompakttır.

Teorem<sup>5</sup>'ten dolayı  $[a, b]$  kapalıdır.

ÖRNEK.  $(\mathbb{R}, \tau_s)$  Hausdorff uzayıdır.

$(a, b), (a, b], [a, b), (a, \infty), (-\infty, b)$  kapalı olmadığından,

Teorem<sup>5</sup>'e göre bu uzaylar kompakt değildir.

• Şimdi kompakt uzayların sonlu çarpımlarının da kompakt old. göstereceğiz. Bunun için önce aşağıdaki Tube lemma'ya ihtiyacımız var.

### Lemma. (Tube Lemma)

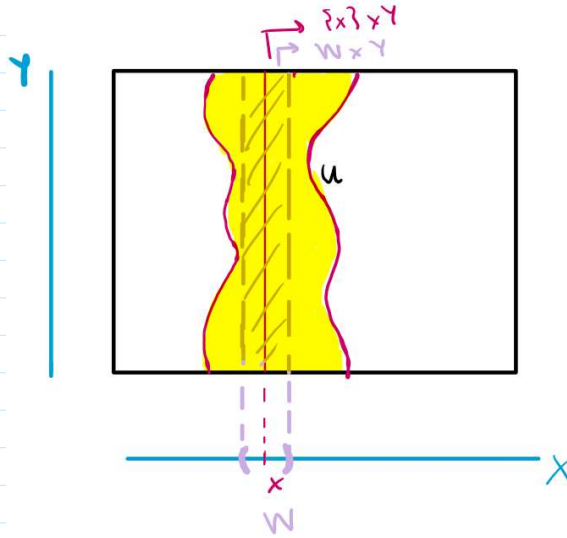
$X, Y$  topolojik uzay ve  $Y$  kompakt olsun.

$x \in X$  alalım.  $U, X \times Y$ 'nin  $\{x\} \times Y$ 'yi içeren bir

açık olsun. Bu durumda  $\exists W \in \mathcal{U}(x)$  vardır ki

$W \times Y \subset U$  olur.

İspat.



$\forall y \in Y$  için  $(x, y) \in W_y \times Y_y \subseteq U$  ol. şek.

$\exists W_y \subseteq X$  açık ve  $\exists Y_y \subseteq Y$  açık seçelim.

(dikkat:  $x$  sabit)

$Y$  kompakt olduğundan  $\{Y_y\}_{y \in Y}$  açık örtüsünden

sonlu açık alt örtü çıkarılabilir:  $Y_{y_1}, \dots, Y_{y_n}$  diyelim.

$\bigcap W_{y_i} =: W$  diyelim.

$\uparrow Y$ 'de açık

$\nwarrow X$ 'te açık

$\bigcap_{i=1}^{\infty} W_{y_i} =: W$  diyelim.

- $W$ ,  $X$ 'te açıktır ( $\tau_3$ 'ten dolayı)
- $x \in W$  olur (çünkü  $x \in W_{y_i}, \forall y_i$  için)

$$W \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (W_{y_i} \times Y_{y_i}) \subseteq U$$

Sonuç olarak  $\exists W \in \mathcal{U}(x)$  bulduk ki  $W \times Y \subseteq U$  dur.

/  
ayrıca  $W'$ 'yu  $\exists x \exists xY$ 'yi  
içercek şekilde inşa ettik.

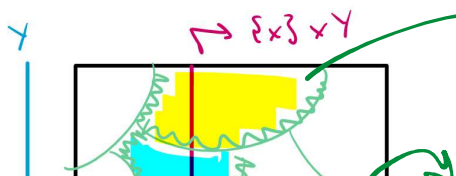
Teorem.  $X$  ve  $Y$  kompakt ise  $X \times Y$  de kompakttır.

İspat.  $\mathcal{E}$ ,  $X \times Y$ 'nin herhangi bir açık örtüsü olsun.

Amaç.  $\mathcal{E}$ 'den sonlu açık örtü çıkarmak.

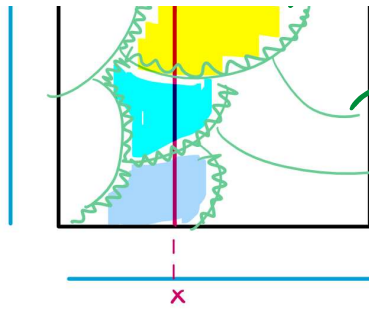
$\forall x \in X$  için,  $\exists x \exists xY \subseteq X \times Y$ 'de kompakttır.

( $Y$  kompakt olduğundan)



Renkli olular  $E_x$ 'i oluşturuyor.

[ $S_v \times Y$  kompakt old.]



$C$  açık dır.

$X \times Y$  kompakt ol.  
İçin  $e$ 'nin sını  
bir  $e_x$  alt örtüşe var.

$$U_x := \bigcup_{C \in e_x} C \text{ olsun.}$$

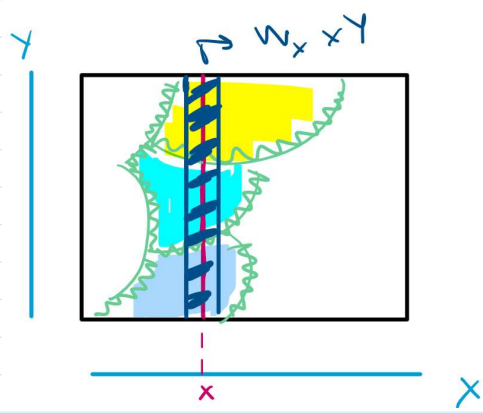
$U_x \subseteq X \times Y$  açıktır (çünkü  $C \in e_x$ ).

&

$U_x, X \times Y$ 'yi içerir.

Tube lemma'dan dolayı,  $\exists W_x \in \mathcal{U}(x)$  vardır ki

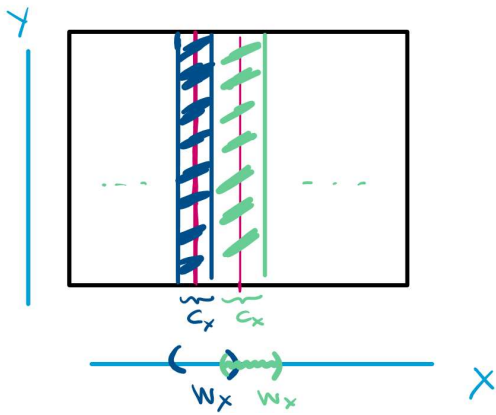
$W_x \times Y \subseteq U_x$  olur (dikkat:  $e_x, W_x \times Y$ 'yi örtür).



Şimdi  $\mathcal{W} = \{W_x \mid x \in X\}$  koleksiyonunu alalım.

$X$  kompakt olduğundan  $\mathcal{W}$ 'nin sını açık  
alt örtüşe vardır:  $\{W_{x_1}, \dots, W_{x_m}\}$  diyelim.

alt örkesi vardır:  $\{W_{x_1}, \dots, W_{x_m}\}$  diyelim.



Bu durumda

$\{C_{x_1}, \dots, C_{x_m}\}, X \times Y$ 'yi

örter ve bu,  $e$ 'nin

sonlu açık alt örkesidir.  $\square$

Sonuç.  $X_1, \dots, X_n$  kompakt ise  $X_1 \times \dots \times X_n$  de kompakttır.

Teorem.  $X$  bir topolojik uzay olsun.

$A$  ve  $B$ ,  $X$ 'te kompakt olsunlar. Böylece  $A \cup B$  de kompakttır.

Teorem. (Heine - Borel Teoremi)

$\mathbb{R}^n$  üzerinde standart topoloji ve standart metrik verilsin.

$A \subseteq \mathbb{R}^n$  'de kompakttır.  $\Leftrightarrow A$ ,  $\mathbb{R}^n$  'de kapalı ve sınırlıdır.

Uyarı: Heine - Borel, sadece standart topoloji ve standart metrik için geçerli ( $\mathbb{R}^n$  'deki).

ÖRNEK.  $[a, b]$ ,  $\mathbb{R}$  'de sınırlı ve kapalı olduğundan kompakttır.

ÖRNEK.  $S' \subseteq \mathbb{R}^2$  'de kapalı ve sınırlı olduğundan kompakttır.

ÖRNEK.  $Torus$  kompakttır.

1. Yöntem: Bölüm 4.2 (bunu gösterdik).

2. Yöntem:  $Torus \subseteq \mathbb{R}^3$  'te kapalı ve sınırlıdır.

Böylece Heine - Borel'den dolayı kompakttır.

3. Yöntem:  $S'$  kompakt oldu söyledik.

Kompakt iki uzayın çarpımı kompakt olduğun  
 $S' \times S'$  de kompakttır.

Soru: Heine-Borel Teoreminde herhangi metrik  
uzay alsaydık, teorem hala geçerli olur muydu?

Cevap: HAYIR! Örneğin,  $(\mathbb{R}, d)$  diskret metrik  
uzayı verilsin.

$A = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  alalım.

- $A$  sınırlıdır. Çünkü  $A \subseteq B_d(\frac{1}{2}, 5) = \mathbb{R}$  olur.
- $A$ ,  $\mathbb{R}$ 'de kapalıdır. (Çünkü  $A^c$ ,  $(\mathbb{R}, d)$ 'de açıktır.  
 $A^c$ 'nin tüm noktaları iç noktadır.)

↓

Bunlara rağmen,  $[0, 1]$ ,  $(\mathbb{R}, d)$ 'de kompakt değildir.

Çünkü  $\mathcal{C} = \{ \{x\} \mid x \in [0, 1] \}$  açık örtüsünden  
sonlu açık alt örtüsü çıkarılamaz.



## KAYNAKLAR

1. Colin Adams, Robert Franzosa. Introduction to Topology: Pure and Applied.
2. Gerard Biskres, Arnoud van Rooij. Topological Spaces: From Distance to Neighborhood.
3. Alex Gonzalez, Kansas State University, Topology Lecture Notes.
4. İsmet Karaca. Teorik ve Uygulama Alanları ile Topoloji.
5. James Munkres, Topology.
6. Walter Rudin. Principles of Mathematical Analysis.
7. Tane Vergili, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Topoloji Ders Notları.