

CEBİRSEL TOPOLOJİ I

DERS NOTLARI

Ayşe BORAT

Eylül 2025

Ders notları hata barındırabilir. Hata tespit edilirse ayse.borat@btu.edu.tr adresinden yazar ile iletişime geçiniz.

İÇERİK

BÖLÜM 0. GİRİŞ

1. Topoloji ne işe yarar? Cebirsel topolojiye neden ihtiyaç duyuldu?

BÖLÜM 1. HOMOTOPİ

1. Homotopi
2. Temel Gruplar
3. Örtü Uzayları
4. Dönüşümün Yükseltimi
5. Çemberin Temel Grubu
6. Retraksiyon
7. Güçlü Deformasyon Retraksiyon
8. Homotopi Tipi
9. S^n 'in Temel Grubu
10. Bazı Yüzeylerin Temel Grupları

BÖLÜM 2. CEBİRSEL TOPOLOJİYE GİRİŞ İÇİN SEÇME KONULAR

1. Kategoriler & Funktorlar
2. Süspansiyon & Ekli Uzaylar
3. CW-Kompleksler
4. Homotopi Genişletme (Extension) Özelliği

BÖLÜM 3. SEIFERT-VAN KAMPEN TEOREMİ

1. Seifert-Van Kampen Teoremi

BÖLÜM 4. ÖRTÜ UZAYLARININ SINIFLANDIRILMASI

1. Örtü Uzayları & Lifting Problemi
2. Örtü Uzaylarının Sınıflandırılması
3. Evrensel Örtü Uzayı
4. Deck Transformasyonları

BÖLÜM 5. YÜKSEK HOMOTOPİ GRUPLARI

1. Yüksek Homotopi Grupları

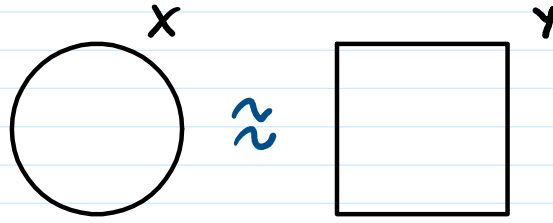
KAYNAKLAR



Elinizde kauçuktan yapılmış bir "cisim" olduğunu varsayın. Bu cismi eğip bükerek, parça koparmadan ve parça eklemekten bir başka cisme dönüştürmeniz isteniyor.

Elde edeceğiniz "yeni cisim" ile "cismin ilk hali" arasında topolojik olarak bir fark yoktur. Aslında cisimlerin "bu tip özelliklerini" inceleyen alana Topoloji denir.

Örneğin, bir çember ve bir kare alalım.



Birinden diğerine yukarıda tarif edildiği gibi geçebiliriz. Bir başka deyişle,

1. X'ten Y'ye parça koparmadan geçebiliriz ($\exists f: X \rightarrow Y$ sürekli).
2. X'ten Y'ye parça eklemeden de geçebiliriz. Alternatif olarak, Y'den X'e parça koparmadan geçebiliriz de denebilir ($\exists g: Y \rightarrow X$ sürekli).

Not: Aslında X'ten Y'ye nasıl geçtiyse, tam tersi şekilde Y'den X'e geçebiliriz. Yani g 'nin, f 'in ters fonksiyonu olmasını istiyoruz.

Bu durumda, topolojik denklik (homeomorfizma) şu şekilde tanımlanır:

Tanım. X ve Y homeomorftır. $\Leftrightarrow \exists f: X \rightarrow Y$ şbn. vardır ki

f sürekli

f^{-1} var (f biyektif)

f^{-1} süreklidir.

$\Leftrightarrow \exists f: X \rightarrow Y$ sür.

$\exists g: Y \rightarrow X$ sür.

vardır ki

$f \circ g = id_Y$ & $g \circ f = id_X$

(f surj. demek)

(f inj. demek)

Topolojideki ana soru, topolojik olarak denk (homeomorf) uzayları sınıflandırmaktır. Elimizde bir grup topolojik uzay var ve biz bunlardan birbiri ile homeomorf olanları aynı torbada toplamak istiyoruz.

İki topolojik uzay homeomorf ise bunu göstermek aslında çok kolay değil. Oysa iki topolojik uzay homeomorf değil ise, bunu göstermek çok daha kolay. Denk uzayları aynı torbaya atacağımızı söylemese de, en azından homeomorf olmayan uzayları farklı torbalara koyacağımızı söylediği için ikinci yaklaşım da kıymetli.

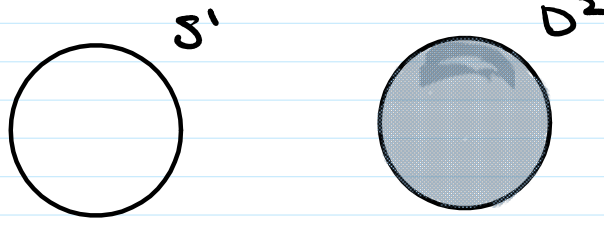
İkinci yaklaşımı, yani homeomorf olmayan uzayları tespit etmek için topoloji invaryantı (topolojik özellik) adı verilen bir konsept tanımlanmıştır.

Eğer X 'teki bir özellik homeomorfizma altında korunuyorsa o özelliğe topoloji invaryantı (topolojik özellik) denir.

Örneğin, kompaktlık bir topoloji invaryantıdır. Eğer $X \approx Y$ ise

- X kompakt ise Y de kompakt olmak zorundadır.
- X kompakt değil ise Y de kompakt olmamak zorundadır.

ÖRNEK.



kompakt

✓

✓

Yol bağlantılı

✓

✓

Bağlantılı

✓

✓

Hausdorff

✓

✓

S^1 ve D^2 yukarıdaki dört topolojik invariyanı da sağlıyor. Bu durumda S^1 ve D^2 homeomorf müdür?

↓

Bilemeyiz!

Genel olarak, tüm bildiğimiz topoloji invariyanları

iki uzay tarafından sağlansa bile, belki henüz

keşfedilmemiş bir topoloji invariyanı biri tarafından

sağlanırken diğer uzay tarafından sağlanmaz

(veya aynı değeri vermez).



YENİ TOPOLOJİ İNVARİYANTINA
İHTİYAÇ VAR!



"Temel grup" bir topoloji invariantıdır ve
 $X \approx Y$ ise X ve Y 'nin temel grupları izomorftur.

Bir başka deyişle, temel grupları izomorf olmayan
uzaylar, homeomorf değildir.

Yukarıdaki örneğe geri dönelim:

S^1 'in temel grubu : $\mathbb{Z}$

D^2 'nin temel grubu : Aşık grup.



$S^1 \not\approx D^2$.

Özetlersek, temel grup yeni bir topoloji invariantıdır ve Genel Topoloji dersinden bildiğimiz topoloji invariantlarının yetersiz kaldığı yerde kullanılabilir.

Temel grubu anlamak için önce "homotopi" kavramıyla bahsedeceğiz.

Tanım. $f, g: X \rightarrow Y$ sürekli fonksiyon olsun ($I = [0,1]$ olmak üzere.)

f, g 'ye homotopik : $\Leftrightarrow \exists F: X \times I \rightarrow Y$ sürekli dön. vardır ki
(homotopic) $F(x,0) = f(x)$

($f \simeq g$ ile gösterilir)

$$F(x,1) = g(x), \quad \forall x \in X \text{ için.}$$

(Burada F 'ye "homotopi" denir.)

- Eğer $f \simeq c$ (c : sabit dönüşüm) ise f 'ye null-homotop denir.
- Homotopiyi X 'ten Y 'ye giden dönüşümlerin 1-parametre ailesi olarak düşünebiliriz:

$$F_t: X \rightarrow Y$$

$$x \mapsto F_t(x) := F(x,t)$$

- t 'yi zaman olarak düşünersek, F homotopisi

$t=0$ anında $f(x)$ fonksiyonunu "sürekli bir şekilde deforme ederek" $t=1$ anında $g(x)$ fonksiyonuna dönüştürüyor.

Tanım. $f, g: I \rightarrow X$ yol $(f(0)=g(0)=x_0$ & $f(1)=g(1)=x_1)$ olanlar.

f, g 'ye yol homotoplu: $\Leftrightarrow \exists F: I \times I \rightarrow Y$ sürekli dşn. vdr ki
(path homotopic)

$$F(s, 0) = f(s)$$

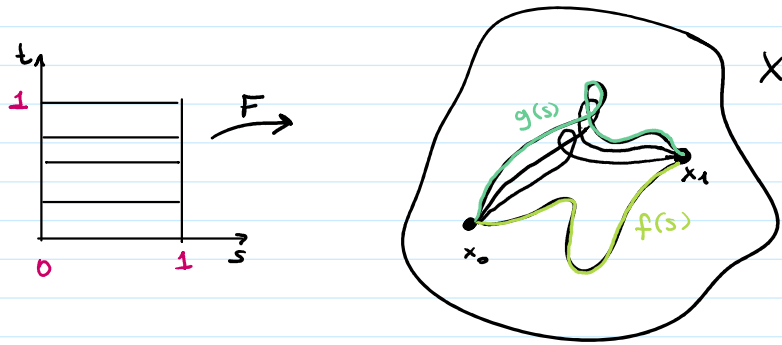
$$F(s, 1) = g(s), \quad \forall s \in I \text{ için}$$

&

($f \simeq_p g$ ile gösterilir)

$$F(0, t) = x_0$$

$$F(1, t) = x_1, \quad \forall t \in I \text{ için.}$$



ÖRNEK. $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(0)=g(0)=x_0$ ve $f(1)=g(1)=x_1$ yolları verilsin. $f \simeq_p g$ olduğunu gösteriniz.

$H: I \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tanımlayalım.

$$(s, t) \mapsto (1-t)f(s) + t g(s)$$

• H süreklidir. NEDEN?

$$\bullet H(s, 0) = (1-0)f(s) + 0 \cdot g(s) = f(s)$$

$$H(s, 1) = g(s)$$

- $H(s, 0) = (1-0)f(s) + 0 \cdot g(s) = f(s)$

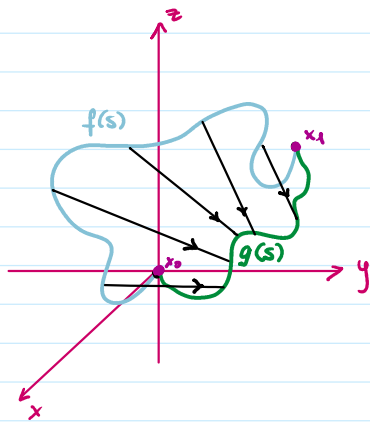
$$H(s, 1) = g(s)$$

- $H(0, t) = (1-t)\underbrace{f(0)}_{x_0} + t\underbrace{g(0)}_{x_0} = x_0$

$$H(1, t) = x_1$$



Böylece $f \simeq_p g$ dir.



Burada H homotopisi,
 $f(s)$ noktasını $g(s)$
 noktasına bir doğru
 boyunca taşır.

Önerme. $\simeq$ ve $\simeq_p$ denklik bağıntıdır.

- f dairesinin / yolunun denklik sınıfı $[f]$ ile gösterilir.

İspat. $\simeq$ 'ın denklik bağıntısı olduğunu gösterelim. ($\simeq_p$ ödev)

$f, g, h : X \rightarrow Y$ sürekli dairesimler olsun.

1. $f \simeq f : \exists F : X \times I \rightarrow Y$

$$(x, t) \mapsto F(x, t) = f(x)$$

— F sürekli.

$$- F(x,0) = f(x)$$

$$- F(x,1) = g(x).$$

$$2. f \simeq g \Rightarrow g \simeq f :$$

$f \simeq g$ old. için $\exists F: X \times I \rightarrow Y$ sdr vardır ki

$$F(x,0) = f(x)$$

$$F(x,1) = g(x)$$

$H: X \times I \rightarrow Y$ tanımlayalım.

$$H(x,t) = F(x,1-t)$$

- H sürekli (çünkü F sürekli)

$$- H(x,0) = F(x,1-0) = F(x,1) = g(x)$$

$$- H(x,1) = f(x)$$



$g \simeq f$ olur.

$$3. f \simeq g \text{ ve } g \simeq h \Rightarrow f \simeq h :$$

$f \simeq g$ old. için $\exists F: X \times I \rightarrow Y$ sdr.

$$F(x,0) = f(x)$$

$$F(x,1) = g(x)$$

$g \simeq h$ old. için $\exists G: X \times I \rightarrow Y$ sdr.

$$G(x,0) = g(x)$$

$g = h \circ \alpha$ için $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlayalım.

$$G(x, 0) = g(x)$$

$$G(x, 1) = h(x)$$

$H: X \times I \rightarrow Y$ tanımlayalım.

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & , 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(x, 2t-1) & , 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

- H Pasting Lemma'dan sürekli. (Ödev)

$$- H(x, 0) = F(x, 0) = f(x)$$

$$- H(x, 1) = G(x, 1) = h(x)$$



$$f \simeq h. \quad \square$$

ÖRNEK. $f, g, h: I \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ yolları şu şekilde verilsin.

$$f(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s)$$

$$g(s) = (\cos \pi s, 2 \sin \pi s)$$

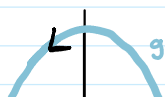
$$h(s) = (\cos \pi s, -\sin \pi s)$$

orijin

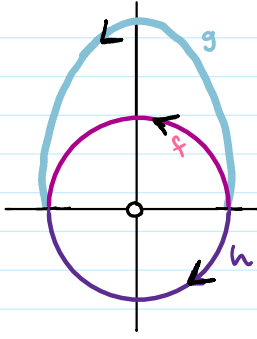
Bu fonksiyonlar neden aşağıdaki gibi çizilir?

Cevap: Panametik

denklemleri hatırlayın.



$f \simeq g$ 'br. NEDEN?



$f \simeq_p g$ 'br. **NEDEN?**

Fakat $f \not\simeq_p h$ ve $g \not\simeq_p h$ 'tır.

(Çünkü h 'tan f 'ye dönüşürken süreklilik bozulmadan orijin noktasından geçilemez.)

NOT: Eğer f, g, h yolları $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ yerine $\mathbb{R}^2$ 'de yarasaydı, $f \simeq_p h$ ve $g \simeq_p h$ olurdu.

Homotopluğu inceleyen dönüşümlerin /yolların değiştirilmesi önemlidir.

Önerme. $f, f': X \rightarrow Y$ homotop & $g, g': Y \rightarrow Z$ homotop olsunlar. Bu durumda $g \circ f \simeq g' \circ f'$ olur.

İspat.

Amaç. $g \circ f \simeq g \circ f'$ & $g \circ f' \simeq g' \circ f'$ olduğunu göstermek.

Böylece, $\simeq$ geçişmeli olduğundan $g \circ f \simeq g' \circ f'$ bulunur.

$f \simeq f' \iff \exists F: X \times I \rightarrow Y$ s.t.

$$F(x, 0) = f(x)$$

$$F(x, 1) = f'(x)$$

$g \simeq g' \iff \exists G: Y \times I \rightarrow Z$ s.t.

$$g \simeq g' \iff \exists G: Y \times I \rightarrow Z \text{ s.t.}$$

$$G(x, 0) = g(x)$$

$$G(x, 1) = g'(x)$$

1. Adım: $g \circ f \simeq g \circ f'$ old. gösterelim.

$$H_1: X \times I \rightarrow Z$$

$$H_1(x, t) = g \circ F(x, t) \text{ tanımlayalım.}$$

- H_1 sürekli. Çünkü g sür. (veriliyor) ve F sürekli (homotopi olduğundan); ve sürekli fonksiyonların bileşkeleleri de sürekliktir.
- $H_1(x, 0) = g \circ F(x, 0) = g(F(x, 0)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$
- $H_1(x, 1) = (g \circ f')(x)$ - benzer şekilde.

2. Adım: $g \circ f' \simeq g' \circ f'$ olduğunu gösterelim.

$$H_2: X \times I \xrightarrow{f' \times \text{id}} Y \times I \xrightarrow{G} Z \text{ tanımlayalım.}$$

$$H_2(x, t) = (G \circ (f' \times \text{id}))(x, t)$$

- H_2 sürekli. Çünkü:

f' sürekli (veriliyor) ve $\text{id}: I \rightarrow I$ birim dñn. sürekli olduğundan

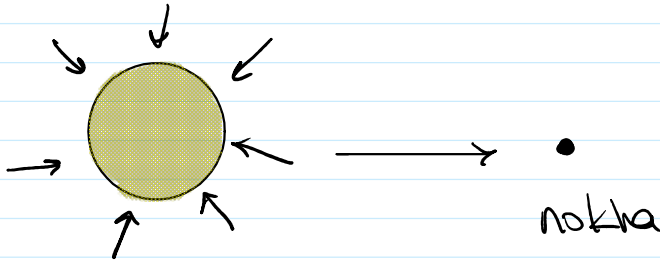
$f' \times I$ de sürekli. Ayrıca G sürekli (homotopi) ve sr. dönüşümün bileşkesi (yani $G \circ (f' \times id)$) sürekli.

$$\begin{aligned} \bullet \quad H_2(x, 0) &= (G \circ (f' \times id))(x, 0) = G((f' \times id)(x, 0)) = g(f'(x), 0) \\ &= g(f'(x)) = (g \circ f')(x) \end{aligned}$$

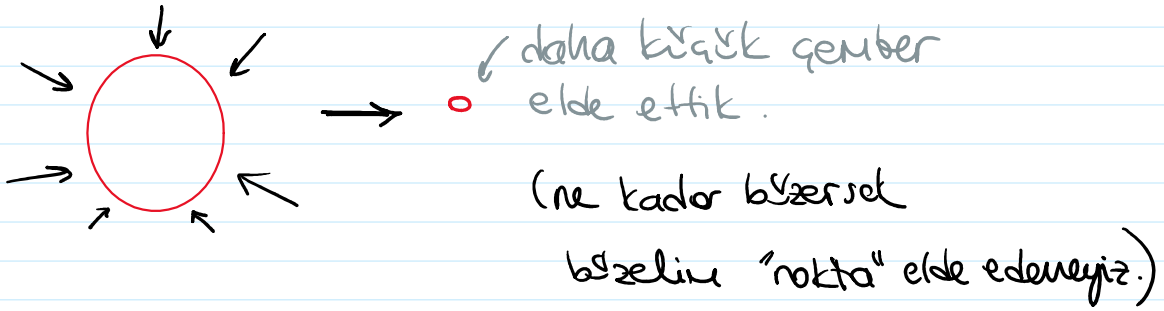
$$\bullet \quad H_2(x, 1) = (g' \circ f')(x), \text{ benzer şekilde. } \square$$

Tanım. $\text{id}_X : X \rightarrow X$ birim dönüşümü null-homotopik ise X 'e büzülebilir (contractible) denir.

Geometrik Yorumu:



D^2 büzülebilir



S^1 büzülebilir değildir.

Geometrik yorumun neder böyle olduğu Homotopi Tipi konusunda ele alınacaktır.

Ödev: $\mathbb{R}^n$ 'nin büzülebilir olduğunu gösteriniz.

Ödev: X bilebilir ise X yol bağlantılıdır. Gösteriniz.



Tersi her zaman doğru değildir!

ÖRNEK. S' yol bağlantılıdır. Fakat S' bilebilir değildir.

(yukarıdaki yorumdan /
daha sonra ispatlanacaktır.)

Tanım. $f: I \rightarrow X, f(0) = x_0, f(1) = x_1$
 $g: I \rightarrow X, g(0) = x_1, g(1) = x_2$ } yollarını alalım.

f ve g 'nin uc uca eklenmesi şu şekilde olur:

(concatenation)

↓
($f * g$ ile gösterilir)

$$(f * g)(s) = \begin{cases} f(2s) & , 0 \leq s \leq 1/2 \\ g(2s-1) & , 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

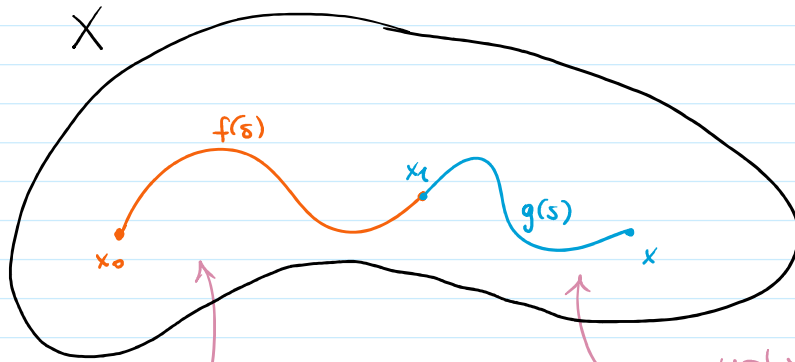
iyi tanımlıdır.



Aslında $f * g$, x_0 'dan x_2 'ye

1.2.2. ...

Aslında $f * g$, x_0 'dan x_1 'ye
bir yoldur. //



yolun ilk yarısını f ile alır.

$(0 \leq s \leq 1/2)$

yolun 2. yarısını g ile alır.
 $(1/2 \leq s \leq 1)$

Teorem. Yollar üzerinde tanımlanan " $*$ " kuralı,

yol-homotopi sınıfları üzerinde iyi tanımlı bir işlem doğurur:

$$[f] * [g] = [f * g]$$

İspat. Amaç. $[f] = [f']$ & $[g] = [g']$ olsun.

Bu durumda $[f * g] = [f' * g']$ olur.

$$[f] = [f'] \Leftrightarrow f \underset{F}{\simeq} f' \quad \& \quad [g] = [g'] \Leftrightarrow g \underset{G}{\simeq} g'.$$

$$H: I \times I \rightarrow X$$

tanımlayalım.

$$H(s, t) = \begin{cases} f(st) & \text{if } 0 \leq t \leq 1 \\ f'(st) & \text{if } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & , 0 \leq s \leq 1/2 \\ G(2s-1, t) & , 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

• H , Pasting lemma'dan sürekli.

$$\bullet H(s, 0) = \begin{cases} F(2s, 0) & , 0 \leq s \leq 1/2 \\ G(2s-1, 0) & , 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(2s) & , 0 \leq s \leq 1/2 \\ g(2s-1) & , 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$= (f * g)(s)$$

$$\bullet H(s, 1) = \begin{cases} F(2s, 1) & , 0 \leq s \leq 1/2 \\ G(2s-1, 1) & , 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f'(2s) & , 0 \leq s \leq 1/2 \\ g'(2s-1) & , 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$= (f' * g')(s)$$

$$\bullet H(0,t) = x_0 \quad \& \quad (f * g)(0) = x_0 = (f' * g')(0)$$

$$\bullet H(1,t) = x_2 \quad \& \quad (f * g)(1) = x_2 = (f' * g')(1)$$

↓

Böylece $f * g \simeq_p f' * g'$ olur. Buradan $[f * g] = [f' * g']$ bulunur. $\square$

Önerme. $*$ işlemi aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$(1) [f] * ([g] * [h]) = ([f] * [g]) * [h]$$

$$(2) [f] * [e_{x_0}] = [f]$$

$$[e_{x_0}] * [f] = [f]$$

$$(3) [f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}] \quad (\bar{f}: I \rightarrow X, \bar{f}(t) = f(1-t) \text{ dnm. §2.})$$

$$[\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}]$$

↓

$*$ işlemi, yol homotopi sınıfları üzerinde
groboid yapısı oluşturur.

fakat grup yapısı oluşturmaz! NEDEN?

İspat.

(1) Amaç. $f * (g * h) \simeq_p (f * g) * h$ old. göstermek.

Böylece $[f] * ([g] * [h]) = ([f] * [g]) * [h]$ old. söyleriz.

$$H(s, t) = \begin{cases} f\left(\frac{4s}{2-t}\right), & 0 \leq s \leq \frac{2-t}{4} \\ g(4s+t-2), & \frac{2-t}{4} \leq s \leq \frac{3-t}{4} \\ h\left(\frac{4s+t-3}{1+t}\right), & \frac{3-t}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

tanımlayalım.

• H Pasting lemma'dan sürekli.

$$\bullet H(s, 0) = \begin{cases} f(2s), & 0 \leq s \leq 1/2 \\ g(4s-2), & 1/2 \leq s \leq 3/4 \\ h(4s-3), & 3/4 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(2s), & 0 \leq s \leq 1/2 \\ (g * h)(2s-1), & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (g * h)(2s-1), & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$= (f * (g * h))(s)$$

$$\bullet H(s,1) = \begin{cases} f(4s) & , 0 \leq s \leq 1/4 \\ g(4s-1) & , 1/4 \leq s \leq 1/2 \\ h(2s-1) & , 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (f * g)(2s), & 0 \leq s \leq 1/2 \\ h(2s-1), & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$= ((f * g) * h)(s)$$

$$\bullet H(0,t) = f(0)$$

$$\bullet H(1,t) = h(1)$$



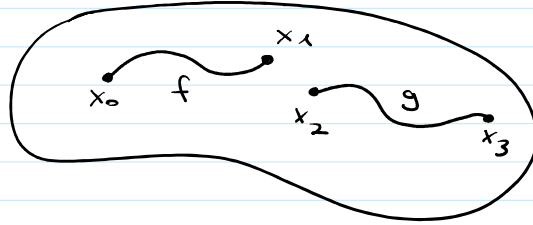
Böylece $f * (g * h) \simeq_p (f * g) * h$ bulunur.

(2) & (3) : Ödev. $\square$

X üzerindeki yol-homotopi sınıflarının $*$ işlemi ile bir grup oluşturmadığını söyledik. Bunun sebebi:

- Yol-homotopi sınıflarını işleme tabii tutamayabiliriz.

Örneğin,



← $f(1) = g(0)$ olmak.

- Bu sorun gözülse bile az önceki önermede 2 tane birim ve 2 tane ters eleman oluştu.

⇓ Peki, bunu nasıl çözeriz?

- Bir $x_0 \in X$ noktası seçelim.

Sadece x_0 'da başlayıp x_0 'da biten kapalı yolların yol-homotopi sınıflarını alalım.

"loop" da denir.

Böylece x_0 tabanlı kapalı yolların yol homotopi sınıfları,

$*$ işlemi altında bir grup oluştururlar. Bu gruba **temel**

grup / 1. homotopi grubu (fundamental group) denir ve

$\pi_1(X, x_0)$ ile gösterilir.

ÖRNEK. $x_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\pi_1(\mathbb{R}, x_0) \cong 0$ olduğunu gösteriniz.

Bu bir gösterimdir.
Grubun tek elemanlı
(yani sadece birimden
ibaret olduğunu) söyler.

Amaç. $\pi_1(\mathbb{R}, x_0) \cong \{ [e_{x_0}] \}$ old. göstermek.

(bunada $e_{x_0} : I \rightarrow X$, $e_{x_0}(t) = x_0$ sabit loop)

Bir başka deyişle, x_0 'da herhangi f loop'ı için $[f] = [e_{x_0}]$ olduğunu göstermek.

f , x_0 'da herhangi bir loop olsun.

$$H : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$$

tanımlayalım.

$$(s, t) \mapsto H(s, t) = (1-t) \cdot f(s) + t \cdot e_{x_0}(s)$$

- H sürekli.
- $H(s, 0) = f(s)$
- $H(s, 1) = e_{x_0}(s) = x_0$
- $H(0, t) = x_0$
- $H(1, t) = x_0$

↓

$$f \simeq_p e_{x_0}.$$

↓

$$\pi_1(\mathbb{R}, x_0) = \{ [f] \mid f \simeq_p e_{x_0} \} = \{ [e_{x_0}] \}. \quad \square$$

Ödev. X konveks ise $\pi_1(X, x_0) \cong 0$ old. gösteriniz ($x_0 \in X$ için).

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. $\forall x, y \in X$ için $(1-t)x + ty \in X$ ($\forall t \in [0,1]$)
oluyorsa X 'e konveks küme denir.

Ödev. $\pi_1(D^2, x_0) \cong 0$ ($x_0 \in D^2$ için) old. gösteriniz.

Ödev. $X = \{a\}$ ise $\pi_1(X, a) \cong 0$ old. gösteriniz.

Soru. Taban noktası değiştirilirse temel grup nasıl etkilenir?

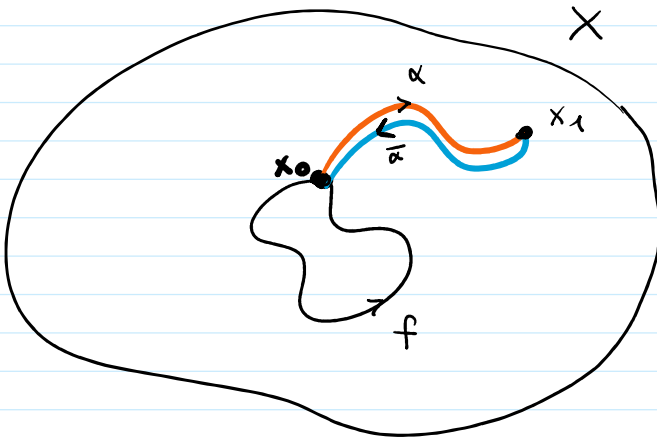
Teorem. α , X 'te x_0 'den x_1 'e bir yol olsun.

$$\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$$

$$[f] \longmapsto \hat{\alpha}([f]) = [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]$$

doğruşuk izomorfizmadır.

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} : I &\rightarrow X \quad \text{olm. sz.} \\ \bar{\alpha}(t) &= \alpha(1-t) \\ &(\alpha' \text{ nin ters yonlu}) \end{aligned}$$



İspat. • $\hat{\alpha}$ iyi tanımlıdır:

Amaç. $[f] = [g] \Rightarrow \hat{\alpha}([f]) = \hat{\alpha}([g])$ ol.d. göstermek.

$[f] = [g]$ alalım.

↓ 2 krafın sağından $[\alpha]$
↓ α ile işlem geçirin

$$[f] * [\alpha] = [g] * [\alpha]$$

↓

$$[\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha] = [\bar{\alpha}] * [g] * [\alpha]$$

$$[\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha] = [\bar{\alpha}] * [g] * [\alpha]$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{\alpha}([f]) = \hat{\alpha}([g]).$$

• $\hat{\alpha}$ homomorfizmadır:

$$\hat{\alpha}([f] * [g]) = \hat{\alpha}([f * g])$$

$$= [\bar{\alpha}] * [f * g] * [\alpha]$$

$$= [\bar{\alpha} * f * g * \alpha]$$

$$= [\bar{\alpha} * f * \underbrace{\alpha * \bar{\alpha}}_{e_{x_0}} * g * \alpha]$$

$$= [\bar{\alpha} * f * \alpha] * [\bar{\alpha} * g * \alpha]$$

$$= \hat{\alpha}([f]) * \hat{\alpha}([g]).$$

NOT: f injektiftir. $\Leftrightarrow f$ 'in sol tersi vardır ($\exists g: g \circ f = \text{id}$)

f surjektiftir. $\Leftrightarrow f$ 'in sağ tersi vardır ($\exists g: f \circ g = \text{id}$)

• $\hat{\alpha}$ biyektiftir:

$\beta: I \rightarrow X$, $\beta(t) = \alpha(1-t) = \bar{\alpha}(t)$ tanımlayalım.

$\hat{\beta}: \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ tanımlayalım.

$\hat{\beta}: \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ tanımlayalım.

$$[\gamma] \mapsto [\bar{\beta}] * [\gamma] * [\beta]$$

$$\hat{\beta} \circ \hat{\alpha}(\gamma_f) = \hat{\beta}(\hat{\alpha}(\gamma_f)) = \hat{\beta}([\bar{\alpha}] * [\gamma_f] * [\alpha])$$

$\nearrow$
 $\pi_1(X, x_0)$

$$= [\bar{\beta}] * [\bar{\alpha}] * [\gamma_f] * [\alpha] * [\beta]$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{[\gamma_{x_0}]} \qquad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{[\gamma_{x_0}]}$

$$= [\gamma_{x_0}] * [\gamma_f] * [\gamma_{x_0}]$$

$$= [\gamma_f]$$

$$= 1_{\pi_1(X, x_0)}(\gamma_f)$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} \circ \hat{\alpha} = 1_{\pi_1(X, x_0)} \Rightarrow \hat{\alpha} \text{ 'nin sol tersini bulduk.}$$

Benzer şekilde $(\hat{\alpha} \circ \hat{\beta})(\gamma_g) = 1_{\pi_1(X, x_1)}(\gamma_g)$ bulunur. $\square$

$\nearrow$
 $\pi_1(X, x_1)$

Corollary. X yol bağlantılı ise herhangi $x_0, x_1 \in X$ için

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1) \text{ olur.}$$

- X yol bağlantılı ise taban noktası olarak ne alırsak alalım,

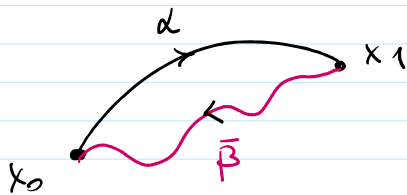
X 'in temel grubu değişmeyecektir. Yani, X 'in temel grubu taban noktasından bağımsızdır. O zaman temel grubu $\pi_1(X)$ ile gösterebiliriz.

Tanım. X basit bağlantılıdır. $\Leftrightarrow X$ yol bağlantılıdır.

$$\& \pi_1(X, x_0) \cong 0, \forall x_0 \in X \text{ için.}$$

Lemma. X basit bağlantılı ise aynı noktada başlayan ve aynı noktada biten herhangi iki yol yol-homotopler.

İspat. $\alpha, \beta: I \rightarrow X$, $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ & $\alpha(1) = \beta(1) = x_1$ olsun.



Bu durumda $\alpha * \beta$ x_0 tabanlı bir loop'tur. X basit bağlantılı olduğundan

$$\pi_1(X, x_0) \cong 0 \text{ 'dır.}$$

$$0 \text{ zaman } [\alpha * \beta] = [e_{x_0}] \text{ olur.}$$

$$[\alpha * \beta] = [e_{x_0}]$$

$\downarrow$

$$[\alpha * \beta] * [\beta] = [e_{x_0}] * [\beta]$$

$$[\alpha] * \underbrace{[\beta] * [\beta]}_{[e_{x_1}]} = [\beta]$$

$$1 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta + \dots + 1 \cdot \beta = 1 \cdot \beta$$

$$\underbrace{\quad}_{[e_{x_1}]}$$

$$[\alpha] = [\beta]$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha \simeq_p \beta. \quad \square$$

Tanım. $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ^{$h(x_0)$} sürekli dönüşüm olsun.

f , X 'te x_0 tabanlı loop ise $h \circ f: I \rightarrow Y$ y_0 -tabanlı loop'tür.

$$h_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

$$[f] \mapsto h_*([f]) = [h \circ f]$$

dönüşümüne h tarafından üretilen / indügeden homomorfizm denir.
(homomorphism induced by h)

- h_* iyi tanımlıdır.

$$[f] = [g] \text{ olsun. } \Rightarrow f \underset{F}{\simeq} g$$

$$I \xrightarrow[f]{g} X \xrightarrow{h} Y$$

$h \circ f$ de, $h \circ f$ ve $h \circ g$ arasında bir homotopidir. (Ödeş)

$$0 \text{ zaman } h \circ f \underset{p}{\simeq} h \circ g. \Rightarrow [h \circ f] = [h \circ g].$$

$$\Rightarrow h_*([f]) = h_*([g]). \quad \square$$

- h_* homomorfizmadır:

Önce $[h \circ (f * g)] = [(h \circ f) * (h \circ g)]$ old. görelim.

Aslında $u \circ (f * g) = (u \circ f) * (u \circ g)$ ' dir. Şöyle ki :

$\forall s \in I$ için

$$(u \circ (f * g))(s) = u \circ \begin{cases} f(2s), & 0 \leq s \leq 1/2 \\ g(2s-1), & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (u \circ f)(2s), & 0 \leq s \leq 1/2 \\ (u \circ g)(2s-1), & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$= ((u \circ f) * (u \circ g))(s) \text{ bulunur. } (*)$$

$$h_* (\overline{f * g}) = \overline{u \circ (f * g)} = \overline{(u \circ f) * (u \circ g)}$$

$\nearrow$ h_* yolu $\nearrow$ $(*)$ 'den

$$= \overline{u \circ f} * \overline{u \circ g}$$

$$= h_*(\overline{f}) * h_*(\overline{g}). \quad \square$$

Teorem. $u: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ve $k: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$

strekli dönüşümleri verilsin. Bu durumda

$$(1) (k \circ u)_* = k_* \circ u_*$$

(2) $\text{id}_X: (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ birim dönüşümü ise

$(\text{id}_X)_*$ birim homomorfizmadır.

İspat. (1) Amaç. $\forall [f] \in \pi_1(X, x_0)$ için

$$(k \circ u)_*([f]) = (k_* \circ u_*)[f] \text{ old. göstermek.}$$

$$(k \circ u)_*([f]) = [(k \circ u) \circ f] = [k \circ (u \circ f)] = k_*([u \circ f])$$

ind. homo.
terimi

ind. homo.
terimi

$$= k_*(u_*([f]))$$

$$= (k_* \circ u_*)([f]). \square$$

$$(2) (\text{id}_X)_*([f]) = [\text{id}_X \circ f] = [f]. \square$$

indirgenmiş
homo. terimi



Bunlara funktorial özellikler denir.

Bunlara fonktorial özellikler denir.
(functorial properties)

Corollary. $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ homeomorfizma ise
 $h_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ izomorfizmadır.

İspat. $k: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$, h 'ın tersi olsun.
(süreklidir)

$\nwarrow$ h homeo. old. ian
 h^{-1} var ve sürekli.

$k \circ h = \text{id}_X$ & $h \circ k = \text{id}_Y$ 'dir.

$k \circ h = \text{id}_X$ alalım.

$\Downarrow$ 2 karta indirgenmiş
homeo.'ya geç.

$$(k \circ h)_* = (\text{id}_X)_*$$

$\left(\begin{array}{l} \text{Fonk.} \\ \text{ö2. (1)} \end{array} \right) \quad \left(\text{Fonk. ö2. (2)} \right)$

$$k_* \circ h_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)} \Rightarrow h_* \text{'in sol tersi } k_* \text{'dir.}$$

$\Downarrow$
 h_* injektiftir.

Benzer şekilde $h_* \circ k_* = \text{id}_{\pi_1(Y, y_0)}$ da gösterilir ve

ψ_x 'in surjektif olduğu da bulunur.

Böylece ψ_x izomorfizmadır. $\square$

SORU: Örtü uzayları neden gerekli?

Bazı uzayların temel gruplarını hesaplamak için kullanacağız.

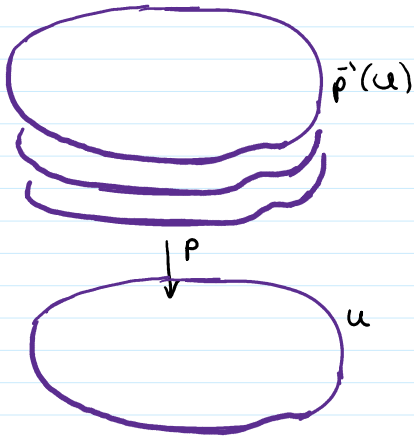
Tanım. $p: E \rightarrow B$ sürekli ve surjektif dönüşüm olsun.

$U \subseteq B$ açık, $\Leftrightarrow \bar{p}'(U)$ ters görüntüsü, $E \supseteq \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$

p tarafından düğü açık ayrık kümelerinin örkütüdür denir. birleşimi şeklinde yazılabilir

&

$\forall \alpha$ için $p|_{V_{\alpha}}: V_{\alpha} \rightarrow U$ homeo.



$\{V_{\alpha}\}$ koleksiyonuna

$\bar{p}'(U)$ 'nin dilimlerine ayrışımı
(partition of $\bar{p}'(U)$ into slices)
denir.

Tanım. $p: E \rightarrow B$ sürekli ve surjektif dñ. olsun.

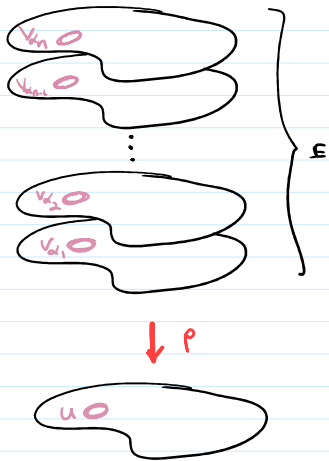
$\forall b \in B$ için $\exists U \in \mathcal{U}(b)$ vardır ki U, p tarafından
düzgün örtülür ise p 'ye **örtü dönüşümü**, E 'ye ise
(covering map)

B 'nin **örtü uzayı** denir.
(covering space)

ÖRNEK. $\text{id}: X \rightarrow X$ birim dönüşümü örtü dönüşümüdür.

ÖRNEK. $E = B \times \underbrace{\{1, 2, \dots, n\}}_{n \text{ tane ayrık } B}$ olsun ve $p: E \rightarrow B$ verilsin.
 $(x, i) \mapsto x$

Bu durumda p örtü dönüşümüdür.



$$p^{-1}(u) = \bigsqcup_{i=1}^n V_{\alpha_i}$$

&

$$p|_{V_{\alpha_i}}: V_{\alpha_i} \xrightarrow{\sim} U(\alpha_i)$$

ÖRNEK. Her homeomorfizma bir örtü dönüşümüdür.

• $p: E \rightarrow B$ homeomorfizma olduğundan p örten ve
sürekli.

p sürekli
old. için

• $\forall b \in B$ için $\exists U \in \mathcal{U}(b)$ vardır ki $p^{-1}(U) = V \subseteq E$ açık.

• $\forall b \in B$ için $\exists U \in \mathcal{U}(b)$ vardır ki $p'(U) = V \subseteq E$ açıktır.

• $\forall x$ için $p|_{V_x} : V_x \rightarrow U$ homeomorfizmadır. (Gösterilebilir.)

Önerme. Her örtü dönüşümü • yerel homeomorfizmadır,

• açık dönüşümdür,

• bölüm dönüşümüdür.

Tanım: $f : X \rightarrow Y$ sürekli dönüşüm olsun. Eğer şu şart sağlanıyorsa, f 'ye yerel homeomorfizma denir:

$\exists V \in \mathcal{U}(x)$ vardır ki $f(V)$ açıktır ve f, V 'yi $f(V)$ 'ye homeomorf kılar.

Örnek. $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ örtü dönüşümüdür.
 $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

(Böylece $\mathbb{R}, S^1$ 'in bir örtü sayılır.)

• p surjektif & sürekli.

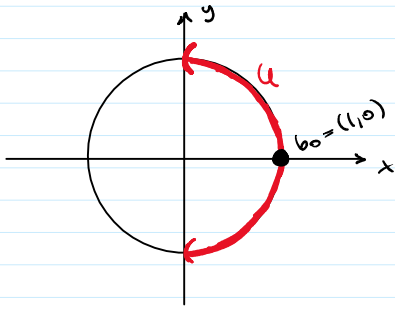
• $\forall b \in S^1$ için $\exists U \in \mathcal{U}(b)$ vardır ki U, p tarafından

döğün örtülür mü?



Örneğin, $b_0 = (1, 0) \in S^1$ için

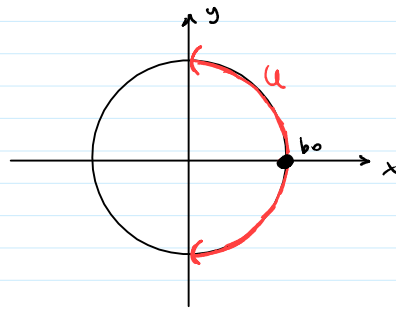
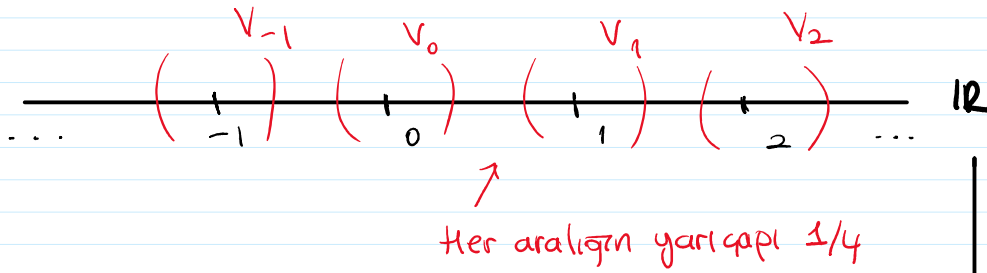
$U \in \mathcal{U}(b_0)$ acağını şekildaki gibi



$u \in U(b_0)$ ağığını şekildeki gibi alınsın.

$p^{-1}(u)$ aşağıda verilen V_n 'lerin birleşimi şeklinde

yazılır: $V_n = \left(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}\right)$. (Gözlemleyiniz)



$\mathbb{R}$
 $\downarrow p$
 S'

• $p|_{V_n} : V_n \rightarrow U$ homeomorfizma mı? ($\forall n$ için)

- $p|_{V_n}$ örtendir.

- $\forall t_1, t_2 \in V_n = \left(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}\right)$ alalım.

$t_1 \neq t_2$ ise

$\sin 2\pi t_1 \neq \sin 2\pi t_2$ & $\cos 2\pi t_1 \neq \cos 2\pi t_2$ 'dir.

$V_\alpha = (\alpha - \frac{1}{4}, \alpha + \frac{1}{4})$ aralığı için, $\forall t_1, t_2 \in (\alpha - \frac{1}{4}, \alpha + \frac{1}{4})$ için
($t_1 \neq t_2$ olmak üzere)

$\sin 2\pi t_1 \neq \sin 2\pi t_2$ dur.

Böylece $(\sin 2\pi t_1, \cos 2\pi t_1) \neq (\sin 2\pi t_2, \cos 2\pi t_2)$.

$\Downarrow$

$$p|_{V_\alpha}(t_1) \neq p|_{V_\alpha}(t_2)$$

$\Downarrow$

$p|_{V_\alpha}$ 1-1 'dir.

- p sürekli olduğundan $p|_{V_\alpha}$ de süredür.

- $p|_{V_\alpha}$ açık dörşüm olduğundan $p|_{V_\alpha}: V_\alpha \rightarrow U$
homeomorfizmadır.

Benzer şekilde $\forall b \in S'$ için $p^{-1}(U) = \bigcup_{t \in \mathbb{Q}} V_n$ ol. set.

ve $p|_{V_n}: V_n \rightarrow U$ homeomorf ol. set. $\exists U \in \mathcal{U}(b)$

bulabiliriz.

$\Downarrow$

Böylece p örş dörşümüdür. $\square$

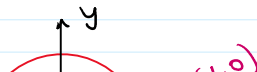
$\downarrow$

Geometrik yorum: p' 'yi, $\mathbb{R}'$ 'yi S' 'in üzerine saran
bir dörşüm olarak hayal edebiliriz.

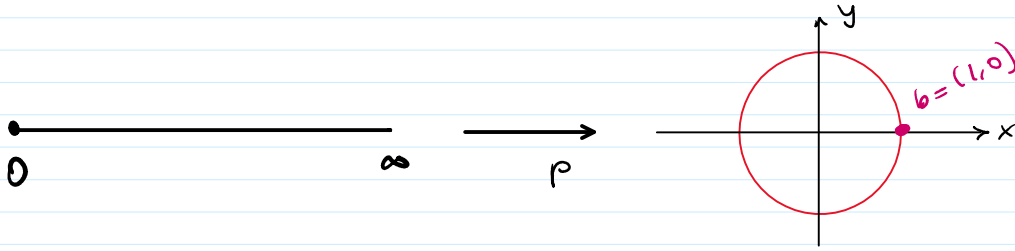
ÖRNEK. $p: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow S^1$

$$t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

örş dörşüm değildir.



$$t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$



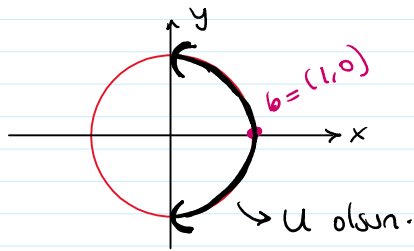
$b = (1, 0) \in S^1$ alalım. b 'nin p tarafından değışen ırkılmedigini gösterelim.

$$U \in \mathcal{U}(b) \text{ için } p^{-1}(U) = [0, a) \cup (a_1, a_2) \cup (a_3, a_4) \cup \dots$$

ve ya

$$p^{-1}(U) = \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ formundadır.}$$

Örneğin,



$$p^{-1}(U) = [0, \frac{1}{4}) \cup (1 - \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}) \cup (2 - \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{4}) \cup \dots$$

$$(p^{-1}(U), \text{ aynı uakların birleşimidir.})$$

Ancak $V_0 \not\subseteq U$ olduğundan dolayı $p|_{V_0} : V_0 \rightarrow U$

homeomorfizma değıldir!

 dey. $p : \mathbb{R}_+ \rightarrow S^1$
 $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

 rke d r      değıldir.

Gösteriniz.

NOT: Bir uzayın birden fazla örtü uzayı olabilir.

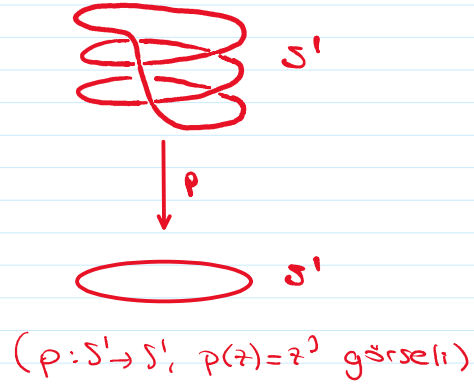
ÖRNEK. $p: S' \rightarrow S'$ örtü dönüşümüdür.
 $z \mapsto z^n$

$S' \subseteq \mathbb{C}$ olarak görelim.

$$p: S' \rightarrow S'$$

$$e^{i\theta} \mapsto e^{i \cdot n \theta}$$

↑ açıyı n'ye
kattırıyor.



Gözetim: Öncelikle $z^n = 1$ denkleminin çözümleri
 (n-th roots of unity)

$$z_k := e^{i 2\pi k/n} = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \text{ 'dir.}$$

($k = 1, \dots, n$ olm. dır.)

Böylece $z = e^{i\theta} \in S'$ verildiğinde

$$p^{-1}(z) = \{e^{i\theta/n} z_1, e^{i\theta/n} z_2, \dots, e^{i\theta/n} z_n\} \text{ elde edilir.}$$

Şimdi $z_0 = e^{i\theta_0} \in S'$ noktasını sabitleyelim.

Amaç. $U = \{e^{i\theta} \in S' \mid |\theta - \theta_0| < \pi/2\}$ 'nin p tarafından

düzgün örtüldüğünü göstermek. Böylece $\forall z_0 \in S'$ için

$\exists U \in \mathcal{U}(z_0)$ bulmuş olacağız ki U , p tarafından düzgün

İzlenim olacak. Yukarıdaki gözlemler dolaylı,

$$V_k := \{ e^{i\theta/n} z_k \mid |\theta - \theta_0| < \pi/2 \} \text{ olm. dz.}$$

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{k=1}^n V_k \text{ bulunur.}$$

Burada V_k 'lar ayrıktır (tüm $k \neq l$ için $V_k \cap V_l = \emptyset$).

$\theta, \theta' \in (\theta_0 - \frac{\pi}{2}, \theta_0 + \frac{\pi}{2})$ ve $k \neq l$ için

$e^{i\theta/n} z_k = e^{i\theta'/n} z_l$ olsun. Böylece

$$\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n} \equiv \frac{\theta'}{n} + \frac{2\pi l}{n} \pmod{2\pi}$$

$$\theta - \theta' \equiv 2\pi(l - k) \pmod{2\pi n}. \quad (*)$$

Buradan $|\theta - \theta'| < \pi < 2\pi|l - k| < 2\pi n \Downarrow$
(*)'dan dolayı geliştiki)

$\forall k = 1, 2, \dots, n$ için $p|_{V_k}: V_k \rightarrow U$ biyeksiyondur & sürekli.

$\forall k$ için $p|_{V_k}^{-1}: U \rightarrow V_k$ dönüşümü de sürekli.
 $e^{i\theta} \mapsto e^{i\theta/n} z_k$



Böylece p örtük dönüşümdür. $\square$

- $p: E \rightarrow B$ örtük dönüşümü olsun. B bağlı olsun. $\exists b_0 \in B$ için $p^{-1}(b_0)$ 'de n tane eleman varsa, $\forall b \in B$ için $p^{-1}(b)$ 'de de n tane eleman vardır. B durumunda E 'ye B 'nin n -katlı örtüsü denir.
(n -fold covering of B)

ÖRNEK. $p: S^1 \rightarrow S^1$ örtük dönüşümü $g \mapsto g^n$ alındığında S^1, S^1 'in $2 \mapsto 2^n$

n -katlı örtüsüdür.

Teorem. $p: E \rightarrow B$ örtük dönüşümü ve $B_0 \subseteq B$ olsun.
 $p|_{p^{-1}(B_0)}: p^{-1}(B_0) \rightarrow B_0$ de örtük dönüşümdür.

İspat. (Ödev)

Teorem. $p: E \rightarrow B$ ve $p': E' \rightarrow B'$ örtük dönüşümü olsun.
 $e \mapsto p(e)$ $e' \mapsto p'(e')$

Bu durumda $p \times p': E \times E' \rightarrow B \times B'$
 $(e, e') \mapsto (p \times p')(e, e') = (p(e), p'(e'))$

Örtük dönüşümdür.

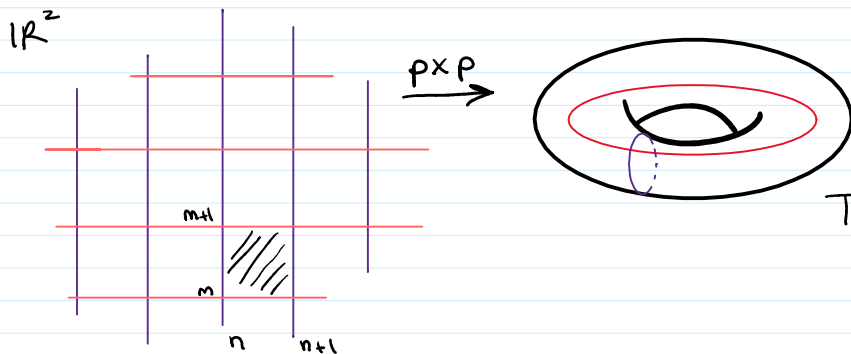
İspat. (Ödev)

ÖRNEK. $T = S^1 \times S^1$ torusunun bir örtü seti $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 'dir ve şu şekilde verilir:

$$p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \times S^1$$

$$(s, t) \longmapsto (p(s), p(t))$$

(Burada $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ örtü dönüşümüdür.
 $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$)



§ Her bir $[n, n+1] \times [m, m+1]$ birim karesini, $p \times p$ ile torusun üzerine öter.

Ödev. $p \times \text{id}_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}_+$ örtü dönüşümü müdür?

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$$

örk dönüşümü ve

$$t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

$\text{id}_{\mathbb{R}_+}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ birim dönüşüm olmak üzere.

Ödev. İnjektif bir örk dönüşümü homeomorfizmadır. Gösteriniz.

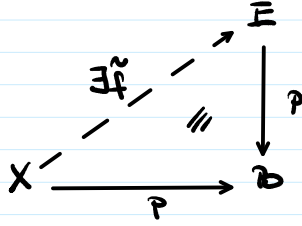
Dönüşümün Yükseltimi (Lifting of a Map)

Tanım. $p: E \rightarrow B$ sürekli dönüşüm verilsin

olduğu an.
olmak zorunda
DEĞİL!

$f: X \rightarrow B$ sürekli olsun. Bu durumda $p \circ \tilde{f} = f$ ol. şer.

$\tilde{f}: X \rightarrow E$ sürekli dönüşüm varsa $\tilde{f}$ 'ye f 'in yükseltimi
(lifting)
denir.



NOT: Her f 'in yükseltimi olmak zorunda değil!

Eğer $p: E \rightarrow B$ sürekli dönüşüm ise YOLLAR yükseltilebilir
ve YOL HOMOTOPİLER yükseltilebilir.

ÖRNEK. $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1$

$$t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

sürekli dönüşüm verilsin.

(a) $f: I \rightarrow S^1$

$$t \mapsto (\cos \pi t, \sin \pi t)$$

(b) $g: I \rightarrow S^1$

$$t \mapsto (\cos \pi t, -\sin \pi t)$$

(c) $h: I \rightarrow S^1$

$$t \mapsto (\cos 4\pi t, -\sin 4\pi t)$$

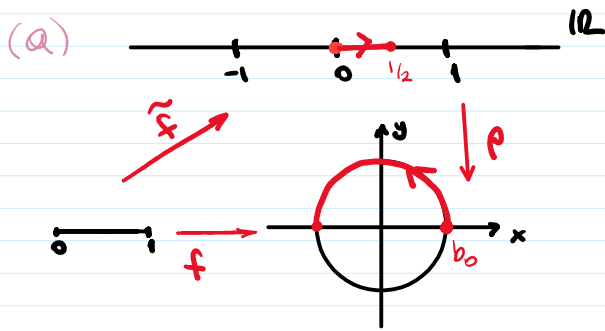
$b_0 = (1, 0) \in S^1$ noktasında

başlayan yollarının

$e_0 = 0$ ve $e_1 = 1$ 'deki

yükseltimelerini

bulunuz.



$\exists \tilde{f}: I \rightarrow \mathbb{R}$ var mıdır ki $p \circ \tilde{f} = f$ olur?

$\forall t \in I$ için

$p \circ \tilde{f}(t) = f(t)$ olmasını istiyoruz.

$$p(\tilde{f}(t)) = f(t)$$

$(\cos 2\pi \tilde{f}(t), \sin 2\pi \tilde{f}(t)) = (\cos \pi t, \sin \pi t)$ olmasını istiyoruz.

$\Downarrow$

$$\cos 2\pi \tilde{f}(t) = \cos \pi t \quad \& \quad \sin 2\pi \tilde{f}(t) = \sin \pi t$$

$\Downarrow$

$$\tilde{f}(t) = \frac{t}{2} \text{ olmalı.}$$

○ Zaten $\tilde{f}: I \rightarrow \mathbb{R}$, $e_0 = 0$ 'daki yöksektirilmişdir.
 $t \mapsto t/2$

Şimdi de $e_1 = 1$ 'deki yöksektirilmişini bulalım.

Yukarıdaki prosedürle aşağıdakiyi elde ettik.

$$(\cos 2\pi \tilde{f}(t), \sin 2\pi \tilde{f}(t)) = (\cos \pi t, \sin \pi t)$$

$$(\cos 2\pi \tilde{f}(t), \sin 2\pi \tilde{f}(t)) = (\cos \pi t, \sin \pi t) \\ = (\cos(\pi t + 2\pi), \sin(\pi t + 2\pi))$$

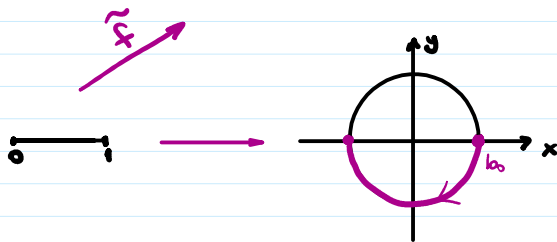
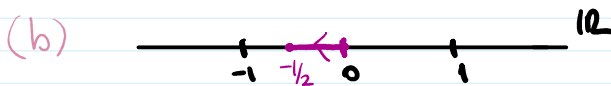
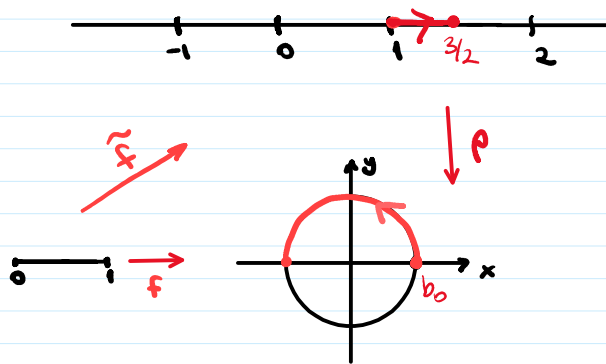
↓

$$\cos 2\pi \tilde{f}(t) = \cos(\pi t + 2\pi) \quad \& \quad \sin 2\pi \tilde{f}(t) = \sin(\pi t + 2\pi)$$

↓

Bunun için $\tilde{f}(t) = \frac{t}{2} + 1$ olmalı.

Böylece $\tilde{f}: I \rightarrow \mathbb{R}$, $e_1 = 1$ 'deki yüksekliğimizdir.
 $t \mapsto \frac{t}{2} + 1$



$\exists \tilde{g}: I \rightarrow \mathbb{R}$ vardır ki $p \circ \tilde{g} = g$ olur?

$\forall t \in I$ için

$p \circ \tilde{g}(t) = g(t)$ olmasını istiyoruz.

$$p(\tilde{g}(t)) = g(t)$$

$$(\cos 2\pi \tilde{g}(t), \sin 2\pi \tilde{g}(t)) = (\cos \pi t, -\sin \pi t) \\ = (\cos(-\pi t), \sin(-\pi t)) \text{ olmasını istiyoruz.}$$

$\Downarrow$

$$\cos 2\pi \tilde{g}(t) = \cos(-\pi t) \quad \& \quad \sin 2\pi \tilde{g}(t) = \sin(-\pi t)$$

$\Downarrow$

$$\tilde{g}(t) = \frac{-t}{2} \text{ olmalı.}$$

Böylece $\tilde{g}: I \rightarrow \mathbb{R}$, $e_0 = 1$ 'deki yökseltilmiştir.
 $t \mapsto -t/2$

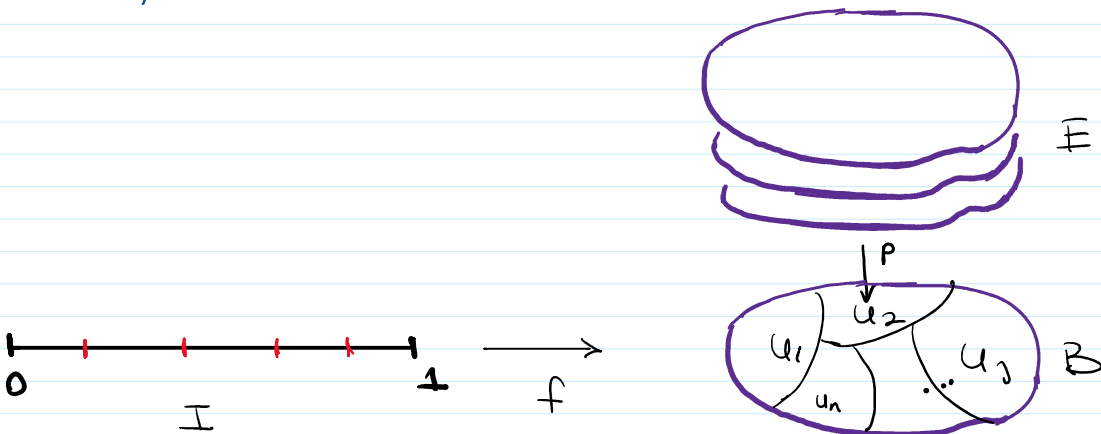
(Geri kalanı ödev).

Lemma. $p: E \rightarrow B$ örtü dönüşümü ve $p(e_0) = b_0$ olsun.

$B \ni b_0$ 'da başlayan herhangi $f: I \rightarrow B$ yolunun, $E \ni e_0$ 'da başlayan tek bir $\tilde{f}: I \rightarrow E$ yökseltimişi vardır.

İspat.

$\tilde{f}$ 'in varlığı:



1. $\mathbb{P}$ σ -ölçüsünü aldığından, $\mathbb{P}'$ 'yi, kendisini taşıyan σ -algebra $\mathcal{U}_i$ 'lere böl.

2. I 'nin öyle bir $s_0, s_1, \dots, s_n$ parçalanışını alalım ki
 $\forall i$ için $f([s_i, s_{i+1}])$, $\mathcal{U}_i$ 'lerden birinin içinde kalsın.

(Lebesgue Number Lemma'dan)

3. $\tilde{f}'$ 'yi inşa edelim:

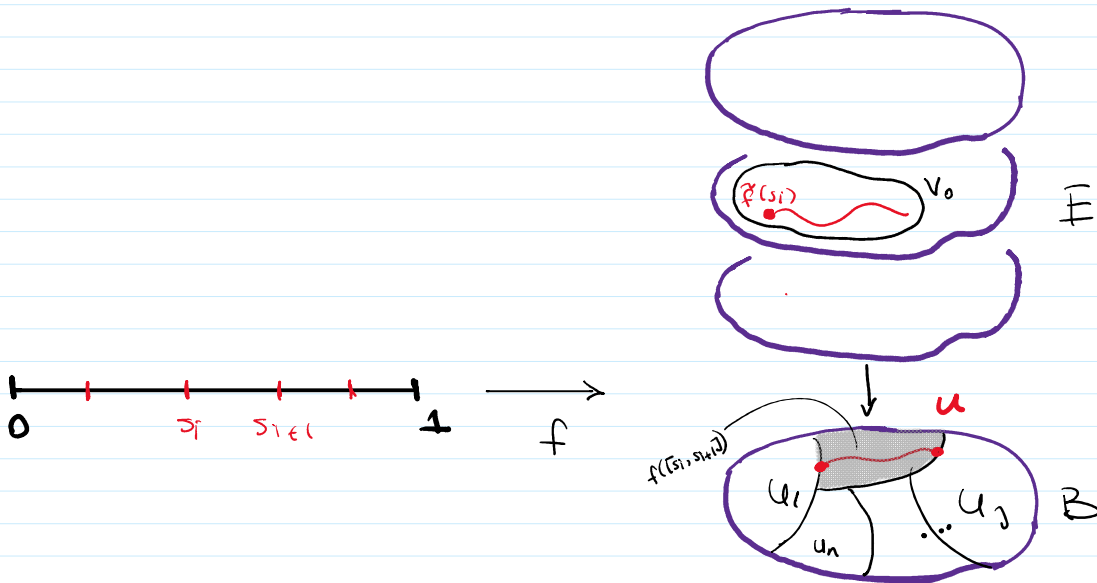
• Önce $\tilde{f}(0) = e_0$ tanımlayalım.

• $\tilde{f}(s)$ 'yi, $0 \leq s \leq s_i$ için tanımlı kabul edip $\tilde{f}'$ 'i $[s_i, s_{i+1}]$

üzerinde tanımlayalım: $f([s_i, s_{i+1}])$ $\mathcal{U}_i$ 'lerden birinin içinde

kalır. Adına U diyelim. $\{V_\alpha\}$, $\mathbb{P}'(U)$ 'nin dilimlere

ayrışımı olsun. $\tilde{f}(s_i) \in V_0$ olsun.



$s \in [s_i, s_{i+1}]$ için $\tilde{f}(s) = (\mathbb{P}|_{V_0})^{-1}(f(s))$ olarak

tanımlansın. $\varphi|_{V_0}: Y_0 \rightarrow U$ homeo. olduğundan

$\tilde{f}, [s_i, s_{i+1}]$ 'de sürekli.

Benzer şekilde devam ederek $\tilde{f}'i$ K 'm $[0,1]$ 'de tanımlarız.

4. Burada Pasting lemma'dan $\tilde{f}$ sürekli.

5. Ayrıca $\varphi \circ \tilde{f}(s) = f(s), \forall s \in I$ sağlanır.

$\tilde{f}$ 'nin tekliğinin ispatı için Munkres, sayfa 343. $\square$

Aşağıdaki lemma, bir sonraki teoremin ispatında kullanılmaktadır.

lemma. $p: E \rightarrow B$ örN dönüşüm ve $p(e_0) = b_0$ olsun.

$F: I \times I \rightarrow B$ sürekli dönüşüm ve $F(0,0) = b_0$ olsun.

$\tilde{F}(0,0) = e_0$ ol. sek. tek bir $\tilde{F}: I \times I \rightarrow E$ genişletilmişidir.

Eğer F yol-homotopi ise $\tilde{F}$ da yol-homotopidir.

Teorem. (Monodromi Teoremi)

$p: E \rightarrow B$ örtüş dönüşümü ve $p(e_0) = b_0$ olsun.

f ve g , B 'de b_0 'dan b_1 'e yol olsunlar.

$\tilde{f}$ ve $\tilde{g}$ de, f ve g 'nin E 'de e_0 'da başlayan yükseltimeleri olsun. Bu durumda

$$f \simeq_p g \iff \tilde{f} \simeq_p \tilde{g} \text{ olur.}$$

İspat. $\Leftarrow$: $\tilde{f} \simeq_p \tilde{g}$ olsun. $\Rightarrow q \circ \tilde{f} \simeq_p q \circ \tilde{g} \Rightarrow f \simeq g$.

yükseltilmiş tırmı

$\Rightarrow$: $f \simeq_p g$ olsun. O zaman f ve g arasında

$F: I \times I \rightarrow B$ yol-homotopisi vardır. $F(0,0) = b_0$ ' dir.

Önceki lemmayı dolayı F 'in, e_0 'daki yükseltimeleri

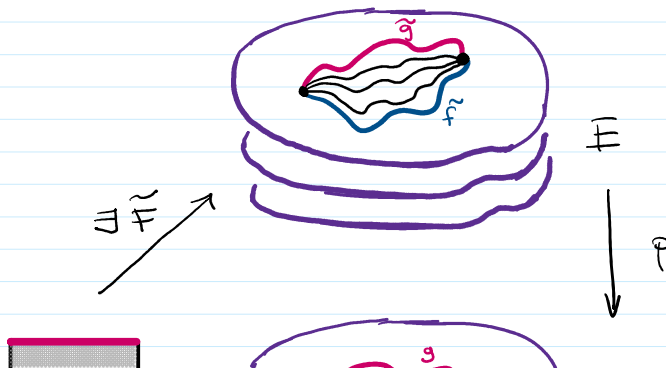
olan $\exists! \tilde{F}: I \times I \rightarrow E$ yol-homotopi vardır. $\tilde{F}(0,0) = e_0$.

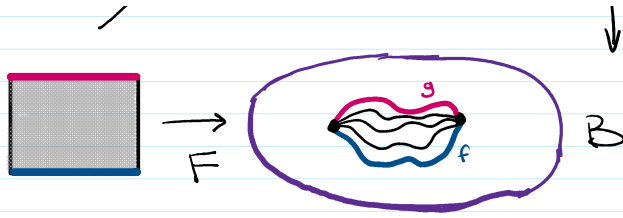
$\tilde{F}|_{I \times 0}$ 'i ele alalım. $\tilde{F}|_{I \times 0}$, $F|_{I \times 0}$ 'in e_0 'daki

yükseltimeleridir. Yükseltimelerin tekliğinden $\tilde{F}|_{I \times 0} = \tilde{f}$

olmalı.

$$(\forall s, \tilde{F}(s,0) = \tilde{f}(s))$$





Benzer şekilde $\tilde{F}|_{I \times 1} = \tilde{g}'$ dir.

Ayrıca $\tilde{F}|_{0 \times I} = e_0$ ve $\tilde{F}|_{1 \times I} = e_1$ olduğundan

↑
tek noktadır önceki
lemmadan.
 e_1 diyelim.

$\hat{f}$ ve $\tilde{g}$, e_0 'da başlayıp

e_1 'de biterler ve $\tilde{F}$, $\hat{f}$ ve $\tilde{g}$ arasındaki homotopidir. $\square$

Tanım. $p: E \rightarrow B$ örtük dönüşüm ve $b_0 \in B$ olsun. $p(e_0) = b_0$ d. set.

$\exists e_0 \in E$ seçelim. $[f] \in \pi_1(B, b_0)$ alındığında, f 'in E 'de e_0 'da başlayan yitkelleklmresini $\tilde{f}$ ile gösterelim.

$$\begin{aligned} \phi: \pi_1(B, b_0) &\rightarrow \tilde{p}^{-1}(b_0) \\ [f] &\mapsto \phi([f]) = \tilde{f}(1) \end{aligned}$$

tanımlayalım.

ϕ iyi tanımlıdır ve e_0 'ın seçiminden bağımsızdır.

$$\left[\begin{array}{l} [f] = [g] \Rightarrow f \sim_p g \xRightarrow[\text{Teorem}]{} \tilde{f} \sim_p \tilde{g} \Rightarrow \tilde{f}(1) = \tilde{g}(1) \\ \downarrow \\ \phi([f]) = \phi([g]). \square \end{array} \right]$$

Teorem. $p: E \rightarrow B$ örtük dönüşüm ve $p(e_0) = b_0$ olsun.

E yol bağıntılı ise $\phi: \pi_1(B, b_0) \rightarrow \tilde{p}^{-1}(b_0)$ surjektiftir.

$$[f] \mapsto \phi([f]) = \tilde{f}(1)$$

E basit bağıntılı ise ϕ injektiftir.

İspat.

- E yol bağıntılı olsun.

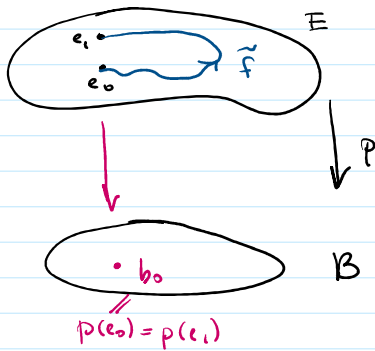
Herhangi $e_i \in p^{-1}(b_0)$ alalım. Amaç. $\exists f: I \rightarrow B, f(0)=b_0=f(1)$
var mıdır ki $\tilde{f}(1)=e_i$?

E yol bağlantılı olduğundan e_0 'den e_i 'e yol vardır:

$\tilde{f}$ diyelim.

$e_0, e_i \in p^{-1}(b_0)$ olduğundan

$$p \circ \tilde{f}(0) = p(e_0) = p(e_i) = p \circ \tilde{f}(1)$$



$f := p \circ \tilde{f} : I \rightarrow B, b_0$ 'da loop'lar.

• E basit bağlantılı olsun.

ϕ' 'nin injektif olduğunu göstermek yeterli.

$\phi([f]) = \phi([g])$ d. sek. $[f], [g] \in \pi_1(B, b_0)$ alalım.

$\tilde{f}$ ve $\tilde{g}$, f ve g 'nin yükseltilmisleri olsun (e_0 'da başlayan).

$\pi_1(E, e_0) \cong 0$ olduğundan, $\tilde{f} \simeq_p \tilde{g}$ 'dir. O zaman
 E basit bağlantılı

$\tilde{f}$ ve $\tilde{g}$ arasında $\tilde{F}$ yol-homotopisi vardır.

Bu durumda $p \circ \tilde{F}$, B 'de f ve g arasındaki yol-homotopidir. π

Bu durumda $p \circ \tilde{F}$, B' de f ve g arasındaki yol-homotopidir. $\square$

Teorem. $\pi_1(S^1) \cong (\mathbb{Z}, +)$ izomorftur.

İspat. $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ $\circ$ r'n' d'n's'm'n'i alalım.
 $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

$e_0 = 0$ olsun. $p(e_0) = b_0 \in S^1$ alalım.
 $\underset{0}{\parallel} \quad \underset{(1,0)}{\parallel}$

$p^{-1}(b_0) = \mathbb{Z}$ 'dir. (Gözetmeyiniz)

$\phi: \pi_1(S^1, b_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ $\circ$ r'n' s'ine alalım.
 $[f] \mapsto \phi([f]) = \tilde{f}(1)$

• $\mathbb{R}$ bağıt bağılantılı olduğu için, önceki teoremden

ϕ biyektiftir.

• ϕ homomorfizma mı? $\phi([f] * [g]) = \phi([f]) + \phi([g])$?

$[f], [g] \in \pi_1(S^1, b_0)$ alalım.

f ve g 'nin y'k'eltilmişleri $\tilde{f}$ ve $\tilde{g}$ olsun (ve $e_0 = 0$ başlangıç noktaları olsun).

$\tilde{f}(1) = m$ ve $\tilde{g}(1) = n$ olsun. $\phi([f]) + \phi([g]) = m + n$ 'dir.

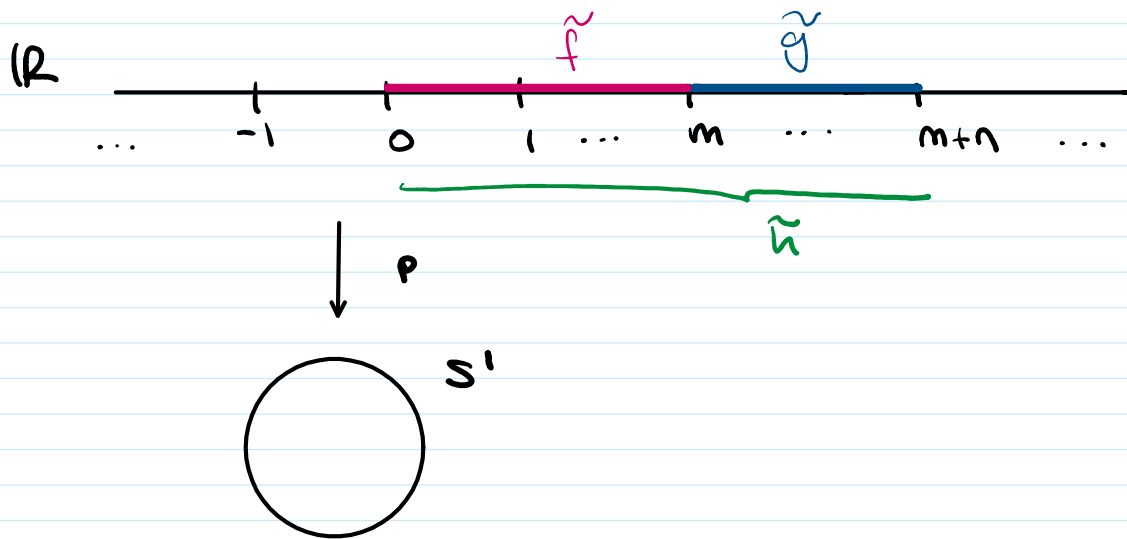
Diğer taraftan, $\mathbb{R}$ üzerinde $\tilde{h}$ yolunu şu şekilde

tanımlayalım:

$$\tilde{h}(s) = m + \tilde{g}(s).$$

$\varphi(m+x) = p(x)$ ($\forall x \in \mathbb{R}$ için) olduğundan, $\tilde{h}$ 'nin bir yığılmasıdır.

(m 'de başlayan)



$\tilde{f} * \tilde{h}$, $f * g$ 'nin yığılmasıdır (0'da başlayan).

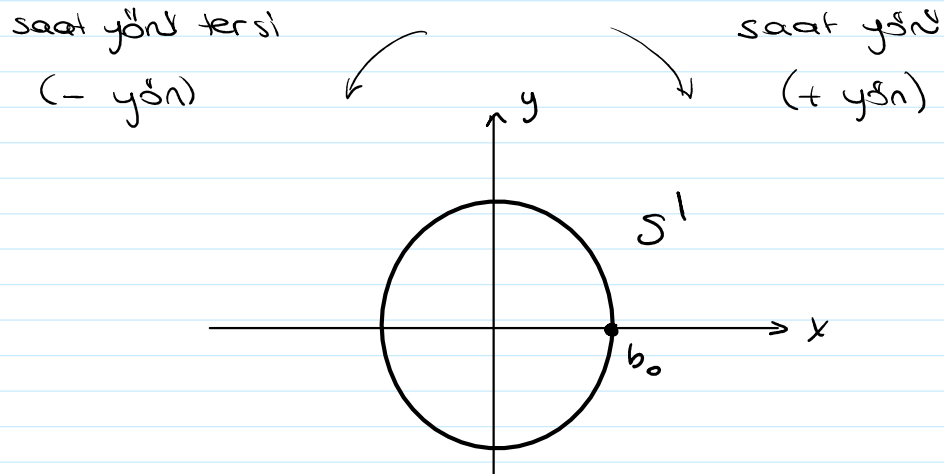
$(\tilde{f} * \tilde{h})(1) = m+n$ dir. 0 zaman

$$\phi(\Gamma f \Gamma * \Gamma g \Gamma) = \phi(\Gamma f * g \Gamma) = \tilde{f} * \tilde{g}(1) = \tilde{f} * \tilde{g}(1)$$

$$= m+n$$

$$= \phi(\Gamma f \Gamma) + \phi(\Gamma g \Gamma). \square$$

Geometrik Yorumu.



Örneğin, δ^1 üzerinde f ve g yolları, sırasıyla,

saat yönünün tersinde 13 tam tur dönsün $\rightarrow \phi([f]) = 13$

ve

saat yönünde 5 tam tur dönsün. $\rightarrow \phi([g]) = -5$

Ayrıca $f * g$ yolu saat yönünün tersinde 8 tam tur döner. $\rightarrow \phi([f * g]) = 8$



$$\phi([f] * [g]) = 8 = 13 + (-5) = \phi([f]) + \phi([g]).$$

Retraksiyon

Tanım. $A \subseteq X$ ve $r: A \rightarrow X$, $r(a)=a$ ($\forall a \in A$ için) şartını sağlayan sürekli dönüşüm olsun. r 'ye X 'in A 'ya **retraksiyon**,
(retraction)
 A 'ya da X 'in **retrakti** denir.
(retract)

Lemma¹ $r: X \rightarrow A$ retraksiyon ve $a_0 \in A$ olsun. Bu durumda $r_*: \pi_1(X, a_0) \rightarrow \pi_1(A, a_0)$ surjektiftir.

İspat. $\iota: A \hookrightarrow X$ inclusion dönüşümü her zaman vardır.

$r \circ \iota = \text{id}_A$ 'dır (gözetimleyiniz).

↓ indirgenmiş homo.'ya geçin.

$$(r \circ \iota)_* = (\text{id}_A)_*$$

$$r_* \circ \iota_* = \text{id}_{\pi_1(A, a_0)} \text{ olur.}$$

r_* 'in sağ tersini bulduk. $\Rightarrow r_*$ surjektiftir. $\square$

Lemma² $r: X \rightarrow A$ retraksiyon ve $a_0 \in A$ olsun.

$\iota: A \hookrightarrow X$ inclusion dönüşümü verilsin. Bu durumda

$$\iota_*: \pi_1(A, a_0) \rightarrow \pi_1(X, a_0) \text{ injektiftir.}$$

İspat. Yukarıdaki lemma'nın ispatına benzer şekilde yapılır. $\square$

NOT: $r \circ \iota = \text{id}_A$ 'dır, demek.

Fakat $\iota \circ r \neq \text{id}_X$ 'tir. Gözlemleyiniz.

ÖRNEK. D^2 'den S^1 'e retraksiyon yoktur.

Varsayalım ki $r: D^2 \rightarrow S^1$ retraksiyon olsun.

$\iota: S^1 \hookrightarrow D^2$ inclusion dönüşümü için $\iota_*: \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(D^2)$

injektif olurdu (lemma 2 'den). Fakat $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ ve

$\pi_1(D^2) \cong 0$ olduğundan $j_*: \mathbb{Z} \rightarrow 0$ injektif

olamaz! $\Downarrow$

Varsayım hatalı. D^2 'den S^1 'e retraksiyon yoktur. $\square$

Teorem. $h: S^1 \rightarrow X$ sürekli dönüşüm olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) h null homotopdur.

(b) $h, k: D^2 \rightarrow X$ sürekli dönüşümlere genişletilebilir.

(c) $h_*: \pi_1(S^1, b_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ 0-homomorfizmasıdır.

↑ her şeyi birime götüren homomorfizma.

İspat.

(a) $\Rightarrow$ (b): h null homotop ise $H: S^1 \times I \rightarrow X$ sür. şunu ki
 $H(x, 0) = h(x)$
 $H(x, 1) = c(x)$

$\pi: S^1 \times I \rightarrow D^2$ dönüşümü tanımlayalım.
 $(x, t) \mapsto (1-t)x$

π sürekli, surjektif ve kapalı dönüşümdür.

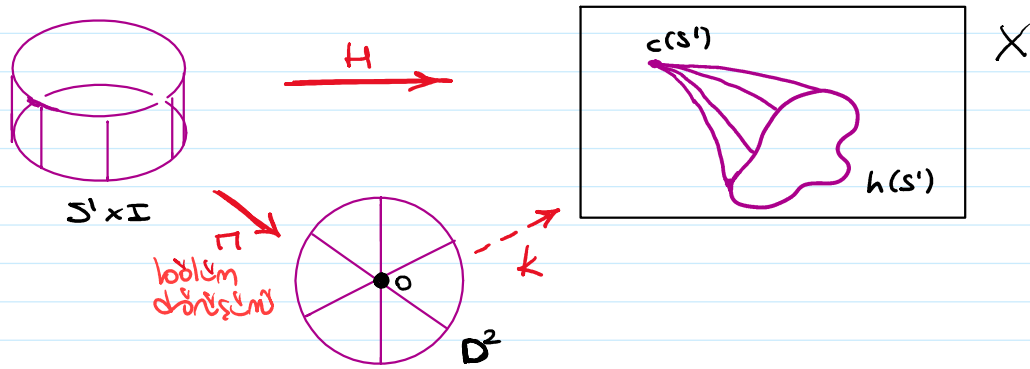
↓
 π bölüm dönüşümüdür.

Teorem: $f: X \rightarrow Y$ sürekli, kapalı ve surjektif ise f bölüm dönüşümüdür.

↓

$S^1 \times \{1\}$, 0 noktasına gider.

Geni kaba yerlerde injektiftir.



H , $S^1 \times I$ 'de sabit olduğundan, r bölüm dönüşümü aracılığıyla $h: S^1 \rightarrow X$ 'in genişletmesi olan $k: D^2 \rightarrow X$ sürekli dönüşümünü verir (şekle bakınız).

(b) $\Rightarrow$ (c): $h: S^1 \rightarrow X$, $k: D^2 \rightarrow X$ dönüşümlere genişletilsin.

h_* 'in 0-homo old. gösterelim.

$\iota: S^1 \hookrightarrow D^2$ inclusion olsun.

$$\left. \begin{array}{l} k \circ \iota: S^1 \hookrightarrow D^2 \rightarrow X \\ x \mapsto x \mapsto k(x), x \in S^1 \end{array} \right\} \Rightarrow k \circ \iota = h \text{ olur}$$

genişletme
old. için

$$k \circ \iota = h$$

$\Downarrow$

$$(k \circ \iota)_* = h_*$$

$\Downarrow$

$$k_* \circ \iota_* = h_* \text{ bulunur.}$$

Diğer taraftan, $\iota_x : \pi_1(S', b_0) \rightarrow \pi_1(D^2, b_0)$ olduğundan

ι_x 0-homo. olmak zorundadır.

Şimdi $k_x \circ \iota_x = h_x$ 'a geçelim.

$$\forall [f] \in \pi_1(S', b_0) \text{ için } h_x([f]) = k_x \circ \iota_x([f]) \\ = k_x(\iota_x([f]))$$

$$= k_x(0)$$

ι_x 0-homo.

$$= 0.$$



h_x 0-homo. bulduk. □

(c) $\Rightarrow$ (a): Ödev.

Corollary. (a) $\iota : S' \hookrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ null homotop değildir.

(b) $\text{id} : S' \rightarrow S'$ birim dönüşümü null-homotop değildir. (Ödev)

İspat. (a) Amaç. $\iota_x : \pi_1(S', b_0) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}, b_0)$

0-homo. olmadığını göstermek.

Çünkü eğer ι_x 0-homo. değilse, yukarıdaki teoremden,

γ null homotop değildir.

$r: \mathbb{R}^2 - \{0,0\} \rightarrow S^1$ retraksiyonunu alalım.

$$x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$$

(NEDEN retraksiyon?)

$\gamma: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 - \{0,0\}$ inclusion'dur. Lemma 2'den

$\gamma_*: \pi_1(S^1, b_0) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0,0\}, b_0)$ injektiftir.

$\mathbb{Z}$
 $\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \gamma_*$ 0-homo. olamaz! (Çünkü γ_* inj. & $\pi_1(S^1, b_0) \cong \mathbb{Z}$.)

$\Rightarrow$ Yukarıdaki teoremlerden $\gamma: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 - \{0,0\}$ null homotop değildir. $\square$

Teorem. (Brouwer Sabit Nokta Teoremi)

$f: D^2 \rightarrow D^2$ sürekli ise $f(x)=x$ ol. sek. $\exists x \in D^2$ vardır.

İspat. Varsayalım ki $\forall x \in D^2$ için $f(x) \neq x$ olsun.

$r: D^2 \rightarrow D^2$ şu şekilde tanımlansın:

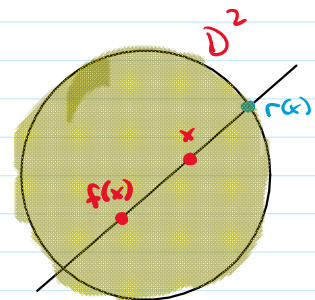
$x \mapsto r(x) :=$ önce $f(x)$ 'ten sonra

x 'ten, bir doğru

boyunca geçerek

∂D^2 'deki noktaya

ulaşın $\gamma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$...



∂D^2 'deki noktaya
gitsin. ∂D^2 'deki bu
noktaya $r(x)$ diyelim."



r iyi tanımlıdır (çünkü $f(x) \neq x$). $\rightarrow f(x)=x$ olsaydı,
 r sürekli olur.

r neden iyi
tanımlı olmadı?

$x_0 \in \partial D^2$ alalım. $r(x_0)=x_0$ olur.
" $(\forall x_0 \in \partial D^2 \text{ için})$
 S^1

Açıklayınız.

Yani $r : D^2 \rightarrow S^1$ retraksiyon olur.

Fakat yukarıdaki örnekte D^2 'den S^1 'e retraksiyon
bulunamaz deniştik. $\downarrow$

Varsayım hatalı. O zaman $\exists x \in D^2$ vardır ki $f(x)=x$ olur. $\square$

Tanım. $A \subseteq X$ alt uzay olsun. Şu şartları sağlayan $H: X \times I \rightarrow X$

sürekli dönüşüm varsa A 'ya X 'in güçlü deformasyon retraksiyonu denir :
(strong deformation retract)

$$H(x, 0) = x$$

$$H(x, 1) \in A$$

$$H(a, t) = a \quad (\forall a \in A \text{ için})$$

H 'ye, X 'in A 'ya güçlü deformasyon retraksiyonu denir.
(strong deformation retract of X onto A)

Geometrik Yorum:

id_X , X 'i A 'ya taşıyan dönüşüm homotopudur ve homotopi boyunca A 'nın her elemanı sabit kalır.

NOT: Allen Hatcher 'da bu kavrama "deformasyon retracts" denilmiştir. Hatcher'daki ifadeyle şöyle de tanımlanabilir:

$\exists H_t: X \rightarrow X$ sürekli dşn. vardır ki $(\forall t \in I \text{ için})$

$$H_0 = \text{id}_X, \quad H_1(X) = A \quad \& \quad H_t|_A = \text{id}_A.$$

NOT: Güçlü deformasyon retractsın özel bir homotopidir.

A, X 'in güçlü
def. retractsıdır. $\Rightarrow \text{id}_X \simeq r.$

Çünkü: $\exists H: X \times I \rightarrow X$

$$H(x, 0) = x = \text{id}_X(x) \quad ①$$

$$H(x, 1) \in A \quad ②$$

$$H(a, t) = a \quad (\forall a \in A) \quad ③$$

Bu x 'in fonksiyonudur. Adına $r(x)$ diyelim.

$r: X \rightarrow A$ fonksiyonudur. Fakat yine de retractsın olmayabilir.

Diğer taraftan, özel olarak ③'te $t=1$ alalım:

$$H(a, 1) = a \quad \text{bulunur.} \quad ① \text{ zmn} \quad r: X \rightarrow A$$

$$\overset{\text{r}}{\underset{\text{r}}{a}}$$

retractsıdır. Ve id_X 'ye homotopdur.

↖ (① & ②'den)

retraksiyondur. Ve id_X 'ye homotopdur.

Teorem. A , X 'in güçlü deformasyon retrakti olsun, $x_0 \in A$ olsun.

1. $(A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$ inclusion dönüşümünün izotopisi

$\iota_*: \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ homomorfizması izomorfizmadır.

İspat. (Ödev)

ÖRNEK. (a) S^1 , $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ 'in güçlü deformasyon retraktidir. Gösteriniz.

(b) (a)'yı kullanarak $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$ 'i hesaplayınız.

(c) $H: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ tanımlayalım.

$$(x, t) \mapsto t \cdot \frac{x}{\|x\|} + (1-t) \cdot \text{id}(x)$$

• $\forall x \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ için

$$H(x, 0) = \text{id}(x) = x$$

$$H(x, 1) = \frac{x}{\|x\|} \in S^1$$

• $\forall a \in S^1$ için $H(a, t) = t \cdot \frac{a}{\|a\|} + (1-t) \cdot \text{id}(a)$

← Gerçekten böyle bir fonksiyon tanımlanabilir mi? Gösteriniz.

$$= t \cdot a + (1-t) \cdot a$$

$a \in S'$ ise
 $\|a\|=1$ olur.

$$= a.$$

$$(b) \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0,0\}) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$



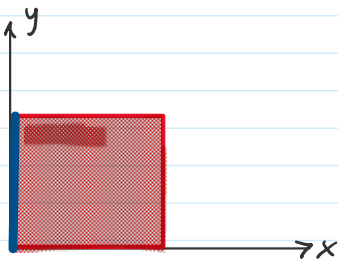
yukarıdaki teoremden

($A_1 X'$ 'in g'ç'g. def. retr. ise)
 temel grupları denktir

Teoreu. $A_1 X'$ 'in g'ç'g'ü deformasyon retrakti ise $A \sim X'$ tir.

İspat. (Ödev)

Ödev.



Şekilde kırmızı ile gösterilen kare

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

ve

mavi ile gösterilen doğru parçası

$$M = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1\}$$
 'dir.

M 'nin K 'nin g'ç'g'ü deformasyon retrakti olduğunu gösteriniz.

Homotopi Tipi

Tanım. $f: X \rightarrow Y$ sürekli dñ. olsun. $\exists g: Y \rightarrow X$ sürekli dñ. vardır ki

$g \circ f \approx id_X$ & $f \circ g \approx id_Y$ oluyorsa, X ve Y 'ye **homotopi denktir /**
(homotopy equivalent)

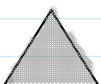
aynı homotopi tipine sahiptir denir ve $X \sim Y$ ile gösterilir.
(have the same homotopy type)

f ve g 'ye **homotopi denklikler** denir ve biri diğertnin **homotopi**
(homotopy equivalences)

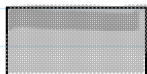
tersidir denir.

Geometrik Yorum (Homeomorfizma vs. Homotopi Denklik)

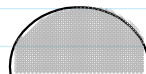
- $X \approx Y$: X 'ten Y 'ye (ve Y 'den X 'e) parça koparmayı/
(homeomorf) eklemeyen, eğip-bükerek geçiş yapılabilir.
- $X \sim Y$: X 'ten Y 'ye (ve Y 'den X 'e) parça koparmayı/
(aynı homotopi tipine sahip) eklemeyen, eğip-bükerek geçiş yapılabilir;
AYRICA X 'ten Y 'ye (ve tersi) geçerken
BÜZMEYE de izin verilir.



$\approx$

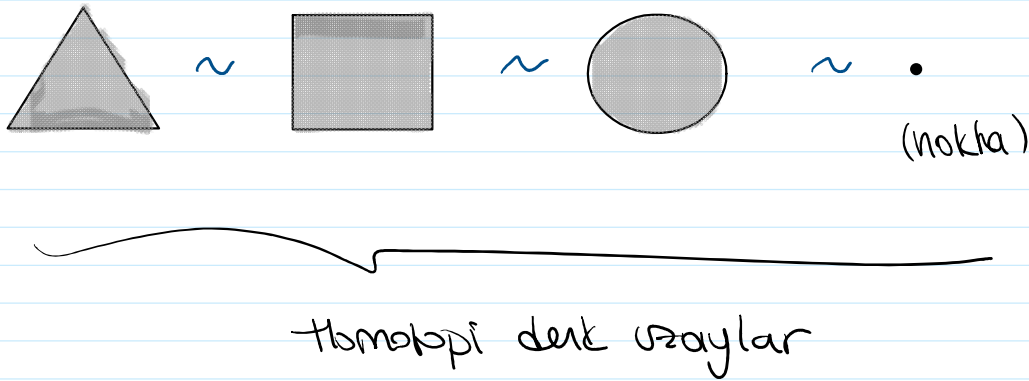
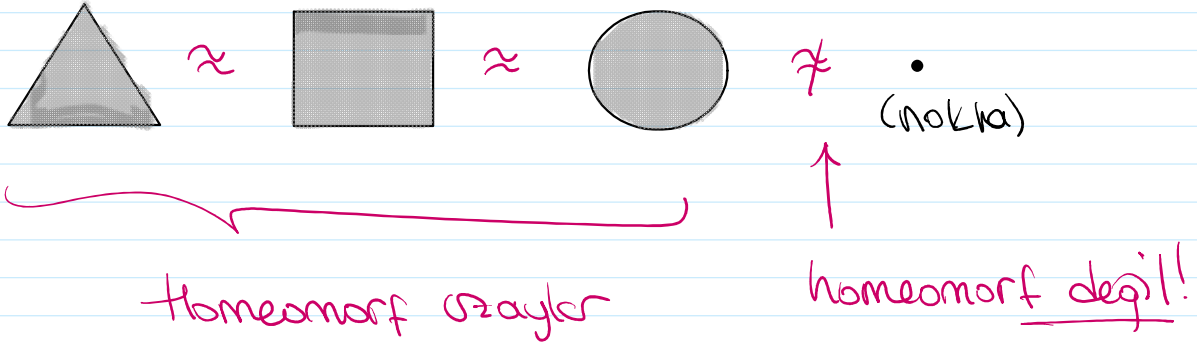


$\approx$



$\not\approx$

•



Önerme. Homotopi denk olma bir denklik bağıntısıdır.

İspat. Ödev.

Soru: A, X 'in güçlü deформasyon retrakti ise A ve X aynı homotopi tipinde midir?



Teoreu. A, X 'in güçlü deформasyon retrakti ise $A \sim X$ olur.

Örnek. $S^1, \mathbb{R}^2 - \{0\}$ 'in güçlü deформasyon retraktidir (gösterdik).

Yukarıdaki teoremden dolayı $S^1 \sim \mathbb{R}^2 - \{0\}$ olur.

Yukarıdaki tenörden dolayı $S' \sim \{ \mathbb{R}^2 - \{0\} \}$ olur.

Amaç. $X \sim Y$ ise $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$ olur.



Bu ifadeyi ispatlamak için aşağıdaki lemmaya ihtiyaç var.

Lemma. $h, k : X \rightarrow Y$ sürekli dsh. ve $h(x_0) = y_0, k(x_1) = y_1$ olsun.

$h \simeq k$ ise $\exists \alpha : I \rightarrow Y, \alpha(0) = y_0, \alpha(1) = y_1$ yolu vardır ki $k_* = \hat{\alpha} \circ h_*$ olur.

Gerçekten, $H : X \times I \rightarrow Y$, h ve k arasındaki homotopi ise

$\alpha(t) = H(x_0, t)$ ile verilir.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{h_*} & \pi_1(Y, y_0) \\ & \searrow k_* & \downarrow \hat{\alpha} \\ & & \pi_1(Y, y_1) \end{array}$$

İspat. Amaç. $\forall f : I \rightarrow X$ x_0 -tabanlı loop için $k_*([f]) = \hat{\alpha} (h_*[f])$ old. göstermek.

~~İspat~~ bu eşitlik orsa

$$[k \circ f] = [\hat{\alpha}] * [h \circ f] * [\alpha]$$



$$[\hat{\alpha}] * [k \circ f] = [h \circ f] * [\alpha]$$



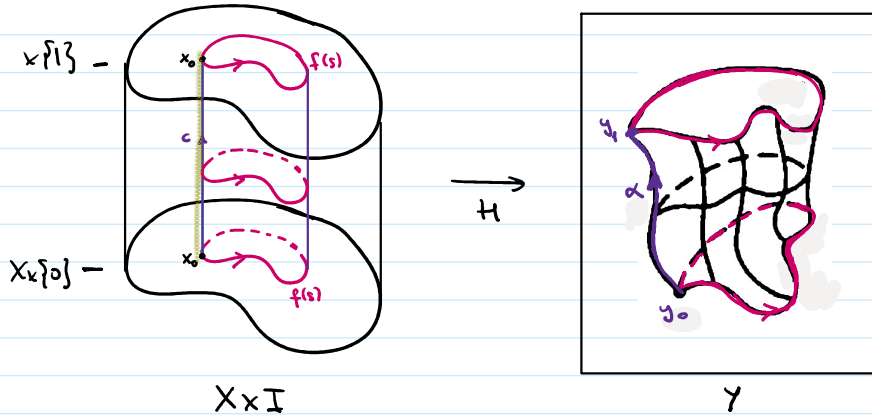
$$[\alpha] * [k \circ f] = [h \circ f] * [\alpha]$$



$$[\alpha * (k \circ f)] = [(h \circ f) * \alpha]$$



$$\alpha * (k \circ f) \simeq_p (h \circ f) * \alpha$$



$$f_0, f_1 : I \rightarrow X \times I \text{ loop} : \begin{aligned} f_0(s) &= (f(s), 0) && \leftarrow X \times \{0\} \text{ üzerindeki } f \text{'in kopyası.} \\ f_1(s) &= (f(s), 1) && \leftarrow X \times \{1\} \text{ 'deki } f \text{'in kopyası.} \end{aligned}$$

$$c : I \rightarrow X \times I \text{ yolu, } c(t) = (x_0, t) \text{ ile tanımlansın. (şekilde, aynı ile belirtilen yol)}$$

$$H : X \times I \rightarrow Y, \quad h \text{ ve } k \text{ arasındaki homotopi olsun.}$$

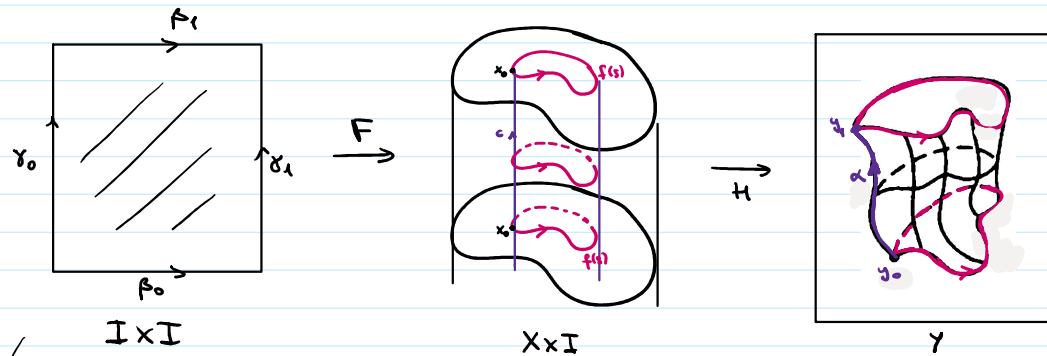
$$\text{Böylece } H(f_0(s)) = H(f(s), 0) = h(f(s))$$

$$H(f_1(s)) = H(f(s), 1) = k(f(s))$$

$$H(c(s)) = H(x_0, t) = \alpha(t)$$

$F: I \times I \rightarrow X \times I$ tanımlayalım.

$$(s, t) \mapsto F(s, t) = (f(s), t)$$



$$\beta_0(s) = (s, 0)$$

$$\beta_1(s) = (s, 1)$$

$$\gamma_0(t) = (0, t)$$

$$\gamma_1(t) = (1, t)$$

$\Downarrow$ Figürden

$$F \circ \beta_0 = f_0$$

$$F \circ \beta_1 = f_1$$

$$F \circ \gamma_0 = F \circ \gamma_1 = c$$

$\beta_0 * \gamma_1$ ve $\gamma_0 * \beta_1$ yollarını alalım. $((0, 0)'dan (1, 1)'e I \times I'da yollar)$

$I \times I$ konveks olduğundan,

$\beta_0 * \gamma_1$ ve $\gamma_0 * \beta_1$ yol homotopdur. Aralarındaki yol homotopi G olsun.

$F \circ G: f_0 * c \simeq_p c * f_1$ de yol homotopidir (şekle bak).

Böylece $H_0(F \circ G): (h \circ f) * \alpha \simeq_p \alpha * (k \circ f)$ (şekle bak). $\square$

Corollary. Y yol bağlantılı olmak üzere $h, k: X \rightarrow Y$ sürekli,

$h(x_0)=y_0, k(x_0)=y_1$ ve $h \simeq k$ olsun.

h_* injektif, surjektif ve ya asikar ise k_* da şyledir.

İspat. Asikar homomorfizma durumunu ispatlayalım. Diğerleri ödev.

$h \simeq k$ olduğundan önceki lemma'dan $\exists \alpha: I \rightarrow Y, \alpha(0)=y_0$ vardır ki
 $\alpha(1)=y_1$

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{h_*} & \pi_1(Y, y_0) \\ & \searrow k_* & \downarrow \hat{\alpha} \\ & & \pi_1(Y, y_1) \end{array} \quad \text{kommutatifdir.}$$

Yani, $\hat{\alpha} \circ h_* = k_*$. Bir başka deyişle, $\forall [\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ için

$$k_*([\gamma]) = \hat{\alpha}(h_*([\gamma])) \text{ olur.}$$

$$= \hat{\alpha}(0)$$

h_* asikar

$$= 0. \quad \square$$

$\hat{\alpha}$ homomorfizma
(birim birime gider)

Corollary. $h: X \rightarrow Y$ sürekli dönüşüm null homotopik ise h_* asikardır.

(ödev)

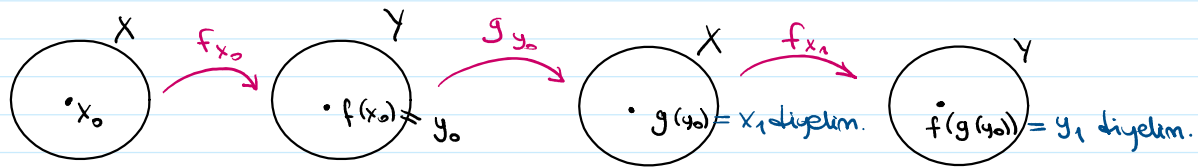
Teorem. $f: X \rightarrow Y$ sürekli ve $f(x_0) = y_0$ olsun.

f homotopi deklük ise $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ izomorfizmadır.

İspat. $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ homotopi deklük olsun. O zaman

$\exists g: Y \rightarrow X$ s.r. vardır ki $fo g \simeq id_Y$ & $go f \simeq id_X$ olur.

Önce değişimleri daha açık yazalım:



indirgenmiş homomorfizmaları
göster örne aldım.

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{(f_{x_0})_*} \pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{(g_{y_0})_* = g_* \text{ diyeelim.}} \pi_1(X, x_1) \xrightarrow{(f_{x_1})_*} \pi_1(Y, y_1)$$

Amaç. $(f_{x_0})_*$ 'in izomorfizma old. göstermek.

Hipotezde $g \circ f_{x_0} \simeq id_X$ 'tir.

Önceki teoremden, $\exists \alpha: I \rightarrow X$, $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1$ } yolu vardır ki

$$(*) \quad (g \circ f_{x_0})_* = (\hat{\alpha} \circ id_X)_* = \hat{\alpha}_* \text{ olur.}$$

↓

izomorfizma (biliyoruz)

↓

↪ izomorfizma (biliyoruz)

$g_* \circ (f_{x_0})_*$ izomorfizmadır.

↓

↪ $g \circ f$ bijektif ise g surjektiftir.

g_* surjektiftir. (1)

(**)

Benzer şekilde $f_{x_1} \circ g \simeq id_Y$ olduğundan, yine yukarıdaki lemma'dan $(f_{x_1})_* \circ g_*$ izomorfizma olduğu bulunur.

↓

↪ $f \circ g$ bijektif ise g injektif.

g_* injektiftir. (2)

Sonuç olarak (1) ve (2)'den g_* izomorfizmadır.

Dikkat. $(f_{x_0})'_*$ in izomorfizma olduğunu göstermeye çalışıyoruz.

(*)', tekrar yazalım: $(g \circ f_{x_0})_* = \hat{\alpha}$

$$g_* \circ (f_{x_0})_* = \hat{\alpha}$$

$$(f_{x_0})_* = g_*^{-1} \circ \hat{\alpha}$$

↪ g_* izomorfizma olduğundan g_*^{-1} var.

↓

g_*^{-1} ve $\hat{\alpha}$ izomorfizma olduğundan

g_x^{-1} ve $\tilde{\alpha}$ izomorfizma olduğundan

$(f_{x_0})_*$ da izomorfizmadır. $\square$

Dikkat. (*) ve (**)’i şu şekilde yorumlasaydık :

(*) : $g_* \circ (f_{x_0})_*$ izomorfizma $\Rightarrow (f_{x_0})_*$ inj. $\checkmark$

(**) : $(f_{x_1})_* \circ g_*$ izomorfizma $\Rightarrow (f_{x_1})_*$ surj. $\checkmark$



$(f_{x_0})_*$ izomorfizma olur mu?



HAYIR!

(NEDEN?)

Bölülebilirliğin "geometrik
yorumunu" seçeriz

Teorem. X bölülebilirdir. $\Leftrightarrow X$, bir elemanlı uzay ile aynı homotopi tipine sahiptir.

İspat. $\Leftarrow$: $X \sim \{*\}$ olsun. O zaman $\exists f: X \rightarrow \{*\}$, $\exists g: \{*\} \rightarrow X$ s.t.
var ki $\left. \begin{array}{l} f \circ g \simeq id_{\{*\}} \\ g \circ f \simeq id_X \end{array} \right\} \text{ olur.}$
(*)

$\forall x \in X$ için, $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(*) = \text{tek bir} \Rightarrow g \circ f$ sabit dir.

$\forall x \in X$ için, $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(*) = \text{tek bir nokta} \Rightarrow g \circ f$ sabit dñ. $(**)$
 f 'in sonucu

$(*)$ ve $(**)$ 'den id_X , sabit dñğışme homotop.

$\Rightarrow \therefore X$ bñzilebilir olsun.

$\text{id}_X : X \rightarrow X$ birim ve $c_0 : X \rightarrow X$ sabit dñ. olm. ız. $\text{id}_X \sim c_0$ 'dir.

$c : X \rightarrow \{*\}$ sabit dñğışim ve $f : \{*\} \rightarrow X$ ızr. dñ. tanımlayalım.
 g

$$\{*\} \xrightarrow{f} X \xrightarrow{c=g} \{*\} \Rightarrow g \circ f = \text{id}_{\{*\}} \Rightarrow g \circ f \sim \text{id}_{\{*\}}. \checkmark$$

$$X \xrightarrow{c=g} \{*\} \xrightarrow{f} X \Rightarrow f \circ g : X \rightarrow X \text{ sabit dñ.} \checkmark$$

$$x \mapsto * \mapsto f(*) \quad x \mapsto f(*)$$

X bñzilebilir olduğundan,
 $f \circ g$ sabit dñğışim id_X 'e
 homotopdur, $f \circ g \sim \text{id}_X. \square$

ÖRNEK. S^1 'in bñzilebilir olmadığını gösterelim.

Varsayalım ki S^1 bñzilebilir olsun. Yukarıdaki teoremden,

$S^1 \sim \{*\}$ olmalı. Diğer taraftan, aynı homotopi tipine sahip

uzayların temel grupları izomorfiktir. Böylece $\pi_1(S^1) \cong \pi_1(\{*\})$ olmalı. $\downarrow$

Çünkü $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \not\cong 0 \cong \pi_1(\{*\})$!

Varsayım hatalı. S' bizzat olabilir değil. $\square$

Teoremi. X ve Y homeomorf ise $X \sim Y$ olur.

İspat. (Ödev)

Ödev. Adınızı ve soyadınızı, aynı homotopi tipine sahip harflerle yeniden yazınız.

S^n : n-bayutlu küre

S^2 : 2-bayutlu küre (bildiğimiz küre)

S^1 : 1-bayutlu küre (çember)

S^0 : 0-bayutlu küre

S^3 'ü göremeyiz ama anlayabiliriz. Bunun için önce S^2 ve S^1 'i anlayalım:

$$S^1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$$

↖ Orjin merkezli
1 yarıçaplı çember

$$S^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$$

$$S^3 = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1 \}$$

Peki S^0 nedir?

$$\begin{aligned} S^0 &= \{ x \in \mathbb{R}^1 \mid x^2 = 1 \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^1 \mid x = 1, x = -1 \} \\ &= \{ -1, 1 \} \quad (2 \text{ noktalı küre}) \end{aligned}$$

Teorem. X top. uz. olsun. $U, V \subseteq X$ açık olm. sz. $X = U \cup V$

olsun. $U \cap V$ yol bağlantılı olsun ve $x_0 \in U \cap V$ alalım.

$i: U \hookrightarrow X$ ve $j: V \hookrightarrow X$ inclusion dñ. olsun.

i ve j 'nin indirgenmiş homomorfizmaları

$i_*: \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ ve $j_*: \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$

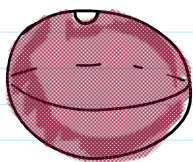
$$[f] \mapsto i_*([f]) = 0$$

$$[f] \mapsto j_*([f]) = 0$$

0-homomorfizmalar ise $\pi_1(X, x_0) = 0$ olur.

ÖRNEK. $\pi_1(S^2)$ 'yi hesaplayalım.

p : kuzey kutup noktası ve q : güney kutup noktası olmak üzere



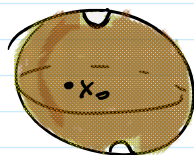
$U = S^2 - \{p\}$ alalım.



$V = S^2 - \{q\}$ alalım.

$S^2 = U \cup V$ 'dir.

$U, V \subseteq S^2$ açıktır.



$U \cap V = S^2 - \{p, q\}$ yol bağlantılıdır.

$U \cap V \neq \emptyset$ olduğunda $x_0 \in U \cap V$ alalım.

$i: U \hookrightarrow S^2$ k $j: V \hookrightarrow S^2$ inclusion'larını alalım.
 $U = S^2 - \{p\}$ $V = S^2 - \{q\}$

$$\iota: U \hookrightarrow S^2 \quad \text{ve} \quad j: V \hookrightarrow S^2 \quad \text{inclusion larını alalım.}$$

$S^2 = \{p\}$ $S^2 = \{q\}$

$S^2 - \{p\} \approx \mathbb{R}^2$ olduğundan,
 ↗ (homeomorfizma birazdan açıklanacak)

$$U \approx \mathbb{R}^2 \Rightarrow \pi_1(U) \cong \pi_1(\mathbb{R}^2) \cong 0. \quad (1)$$

$$V \approx \mathbb{R}^2 \Rightarrow \pi_1(V) \cong \pi_1(\mathbb{R}^2) \cong 0. \quad (2)$$

Böylece

$$\begin{array}{ccc} i_* : \pi_1(U, x_0) & \rightarrow & \pi_1(S^2, x_0) \\ (1) \nearrow \mathbb{Z} & & \\ & 0 & \\ & \& & \\ j_* : \pi_1(V, x_0) & \rightarrow & \pi_1(S^2, x_0) \\ (2) \nearrow \mathbb{Z} & & \\ & 0 & \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} i_* & & j_* \end{array}} \right\} \text{0-homo.'dır.}$$

↓ Yukarıdaki
teoriden

$$\pi_1(S^2, x_0) \cong 0. \quad \square$$

Teorem. $n \geq 2$ için $\pi_1(S^n) \cong 0$ olur.

İspat. $p = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ kuzey kutup noktası

$q = (0, 0, \dots, -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ güney kutup noktasını gösterebiliriz.

$U = S^n - \{p\}$ ve $V = S^n - \{q\}$ alalım. $U, V \subseteq S^n$ açıktır.

$S^n = U \cup V$ ve $U \cap V = S^n - \{p, q\}$ yol bağlantılıdır.

$i: U \hookrightarrow S^n$ ve $j: V \hookrightarrow S^n$ inclusion'larını alalım.
 $\parallel$
 $S^n - \{p\}$ $S^n - \{q\}$

$S^n - \{x\} \approx \mathbb{R}^n$ 'dir. Böylece $\pi_1(U) \cong \pi_1(\mathbb{R}^n) \cong 0$.

$\uparrow$ (Birazdan
gösterilecektir)

&
 $\pi_1(V) \cong \pi_1(\mathbb{R}^n) \cong 0$.

İndirgenmiş homomorfizmalarda bu bilgiyi yatalım:

$i_*: \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(S^n, x_0)$ & $j_*: \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(S^n, x_0)$.
 $\parallel$
 0 0

Böylece i_* ve j_* 0-homomorfizmalardır.

$\downarrow$ Teorem'den

$\pi_1(S^n, x_0) \cong 0$ bulunur. $\square$

$n \geq 1$ için $S^n - \{p\} \approx \mathbb{R}^n$ olduğunu ispatlayalım:

(Aşağıda $x =$ kutup kutbu noktası olarak hesap yapacağız)

$$f: S^n - \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{1-x_{n+1}} (x_1, \dots, x_n)$$

stereografik izdüşüm dönüşümünün tersi

$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow S^n - \{p\}$$

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto (\underbrace{t(y)}_{\uparrow} \cdot y_1, \dots, t(y) \cdot y_n, 1-t(y))$$

$$\left(t(y) = \frac{2}{1+\|y\|^2} \text{ olm. 32.} \right)$$

NOT: Ayrıca $S^n - \{p\} \rightarrow S^n - \{q\}$ yansıma dönüşümü
 $(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1})$ (reflection)

homeomorfizmadır. Böylece $S^n - \{q\} \approx \mathbb{R}^n$ 'dir.

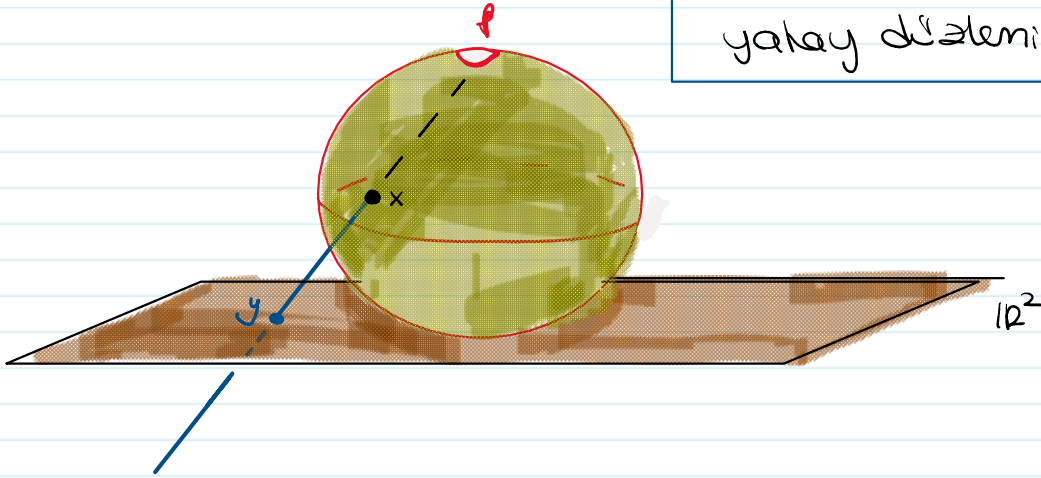
Geometrik Yorum: (Stereografik izdüşüm)

$$f: S^2 - \{p\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

şu şekilde tanımlanır: ↷

$$x \longmapsto y$$

$x \in S^2 - \{p\}$ alalım. p 'den başlayan ve x 'ten geçen doğru, birinci yatay düzlemi y 'de keser.



$x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 - \{p\}$ olmak üzere, y 'nin koordinatları

hesaplanırsa $y = \frac{1}{1-x_3} (x_1, x_2)$ bulunur.

NOT: $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aynı şekilde tanımlanabilir miydi?

p 'yi dahil etmemek zorunda mıyız?

Corollary. $n \geq 2$ için S^n basit bağlantılıdır.

ÖRNEK. $n \geq 2$ için $\mathbb{R}^{n+1} \not\cong \mathbb{R}^n$ old. gösteriniz.

Varsayalım ki $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ homeomorfizma olsun.

Teorem. $f: X \rightarrow Y$ homeomorfizma ve $U \subseteq X$ ise
 $f|_U: U \rightarrow f(U)$ homeomorfizmadır.

$U := \mathbb{R}^1 - \{0\}$ seyelim. $\downarrow$ (İspatlayın-ödev)

$f|_{\mathbb{R}^1 - \{0\}}: \mathbb{R}^1 - \{0\} \rightarrow f(\mathbb{R}^1 - \{0\})$ homeomorfizmadır.

$\equiv \mathbb{R}^n - \{f(0)\}$ (ödev)

Fakat $\mathbb{R}^1 - \{0\}$ bağlantılı değil iken $\mathbb{R}^n - \{f(0)\}$ bağlantılıdır.

Böylece $f|_{\mathbb{R}^1 - \{0\}}$ homeomorfizma olamaz!



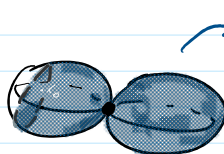
Varsayım yanlış! $\mathbb{R}^1$ ve $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$ için) homeomorf
olamaz! $\square$

ÖRNEK. $\pi_1(S^2 \vee S^2)$ hesaplayınız.



$S^2 \vee S^2$ (Tek noktada yapıştırılmış iki küre)

U ve V aşağıdaki şekilde seçilirse $U, V \subseteq S^2 \vee S^2$ açık



$U \cup V = S^2 \vee S^2$ olur.



unv

UNV yol bağlantılıdır. $x_0 \in UNV$ seçelim.

$$\left. \begin{array}{l} i: U \hookrightarrow S^2 \vee S^2 \\ j: V \hookrightarrow S^2 \vee S^2 \end{array} \right\} \text{inclusion'larını alalım.}$$

Bu durumda

$$i_*: \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(S^2 \vee S^2, x_0)$$

$\cong$
0

Çünkü $U \cong \mathbb{R}^2$
&

Homeomorf uzayların temel grupları izomorf

$$j_*: \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(S^2 \vee S^2, x_0)$$

$\cong$
0

Çünkü $V \cong S^2$
&

Aynı homotopi tipindeki uzayların
temel grupları izomorf

$\Downarrow$
Böylece $\pi_1(V) \cong \pi_1(S^2) \cong 0$.

Böylece i_* ve j_* 0-homo. olmak zorundadır!

$\Downarrow$ Teorem'den

$$\pi_1(S^2 \vee S^2, x_0) \cong 0.$$

$S^2 \vee S^2$ yol bağlantılı oldu için bütün retraksiyonu
olmasak da olur, yani $\pi_1(S^2 \vee S^2) \cong 0$. $\square$

Ödev: p ve q şekilde gösterilen noktalar olmak üzere

$$\left. \begin{array}{l} U = S^2 \vee S^2 - \{p\} \\ V = S^2 \vee S^2 - \{q\} \end{array} \right\} \text{ seçerek,}$$



$\pi_1(S^2 \vee S^2) \cong 0$ olduğunu gösteriniz.

Ödev: $\pi_1(S^7 \vee S^7)$ hesaplayınız.

Bazı Yüzeylerin Temel Grupları

Tanım. X Hausdorff olsun ve sayılabilir bazı sahip olsun. X 'in her noktasının öyle bir komşuluğu vardır ki, bu komşuluk $\mathbb{R}^n$ 'in bir açık alt kümesine homeomorf oluyorsa, X 'e n -boyutlu manifold denir.

Özel olarak, $n=2$ ise X 'e yüzey de denir.

Torus: T

Teorem. $\pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$

İspat. $p_1: X \times Y \rightarrow X$ ve $p_2: X \times Y \rightarrow Y$ izdüşürüm
 $(x, y) \mapsto x$ $(x, y) \mapsto y$

örnekleri olsun.

İndirgenmiş homomorfizmaları

$$p_{1*}: \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$
$$[f] \mapsto (p_1)_*([f]) = [p_1 \circ f]$$

k

$$pr_{2*} : \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

$$[f] \longmapsto (pr_2)_*([f]) = [pr_2 \circ f]$$

Aşağıdaki dönüşümü tanımlayalım:

$$\Phi : \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

$$\begin{aligned} [f] &\longmapsto \Phi([f]) = pr_{1*}([f]) \times pr_{2*}([f]) \\ &= [pr_1 \circ f] \times [pr_2 \circ f] \end{aligned}$$

Amaç. Φ izomorfizma olduğunu göstermek.

• Φ injektiftir:

$\ker \Phi = \{0\}$ olduğunu gösterelim.

$f: I \rightarrow X \times Y$, $X \times Y$ 'de (x_0, y_0) -tabanlı loop olsun ve

$\Phi([f])$, $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ 'in birim elemanı olsun. ↗ $\Phi([f]) = [e_{x_0}] \times [e_{y_0}]$

Amaç. $[f]$, $\pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0)$ 'in birim elemanı olduğunu göstermek.

$$\Phi([f]) = [e_{x_0}] \times [e_{y_0}]$$

$$[pr_1 \circ f] \times [pr_2 \circ f] = [e_{x_0}] \times [e_{y_0}]$$

$$\Rightarrow [pr_1 \circ f] = [e_{x_0}] \quad \& \quad [pr_2 \circ f] = [e_{y_0}]$$

$$\Rightarrow \text{pr}_1 \circ f \simeq_p e_{x_0} \quad \& \quad \text{pr}_2 \circ f \simeq_p e_{y_0}.$$

$\nearrow$ G homotopisi $\nearrow$ H homotopisi

$F: I \times I \rightarrow X \times Y$ tanımlayalım.

$$(s, t) \mapsto F(s, t) = G(s, t) \times H(s, t)$$

- F sürekli.

$$- F(s, 0) = G(s, 0) \times H(s, 0) = (\text{pr}_1 \circ f)(s) \times (\text{pr}_2 \circ f)(s) = f(s)$$

$$- F(s, 1) = G(s, 1) \times H(s, 1) = e_{x_0} \times e_{y_0} \quad \nearrow (x_0 \times y_0)\text{-tabanlı sabit loop.}$$

• Φ surjektiftir:

$g: I \rightarrow X$ x_0 -tabanlı loop ve $h: I \rightarrow Y$ y_0 -tabanlı loop olsun.

$$[g] \times [h] \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \text{ için } \exists [f] \in \pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0)$$

var mıdır ki $\Phi([f]) = [g] \times [h]$ olur?

$f: I \rightarrow X \times Y$ tanımlayalım.

$$t \mapsto f(t) = g(t) \times h(t)$$

- f sür.

$$\left. \begin{array}{l} - f(0) = g(0) \times h(0) = x_0 \times y_0 \\ - f(1) = g(1) \times h(1) = x_0 \times y_0 \end{array} \right\} f, x_0 \times y_0\text{'da loop.}$$

$$- \Phi([f]) = \Gamma_{f \circ \sigma} \vee \Gamma_{f \circ \tau} = \Gamma_{f \circ (\sigma \vee \tau)} \vee \Gamma_{f \circ (\sigma \wedge \tau)}$$

$$- \phi(f) = [\pi_1 \circ f] \times [\pi_2 \circ f] = [\pi_1 \circ (g \times h)] \times [\pi_2 \circ (g \times h)]$$

$$= [g] \times [h]$$

π_i , i-inci bileşen izomorfizmi

Corollary. (Torus'un temel grubu)

$$\pi_1(\mathbb{T}) \cong \pi_1(S^1 \times S^1) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$T \cong S^1 \times S^1$$

&

homeomorf
uzayların temel
grupları izomorftur

Yukarıdaki
teorem

Projektif Uzaklık: $\mathbb{RP}^2$

Tanım. Projektif uzaklık $\mathbb{RP}^2$, S^2 'nin x noktasını, antipodal noktası

$-x$ 'e denk kılma ile elde edilen bölüm uzayıdır.

Teorem. $\mathbb{RP}^2$ kompakt bir yüzeydir ve

$p: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ bölüm dönüşümü örk dönüşümüdür.

$$x \mapsto [x]$$

İspat. Munkres / Theorem 60.3 - Okuma ödevi.

Corollary. ($\mathbb{R}P^2$ 'nin temel grubu)

$$\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2.$$

İspat. $p: S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ örklü dönüşümdür (yukarıdaki teoremden).
 $x \mapsto [x]$

S^2 basit bağlantılı olduğundan,

Teorem. $p: E \rightarrow B$ örklü dñ. ve $p(e_0) = b_0$ olsun.

$\phi: \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^*(b_0)$ verilsin.

$$[f] \mapsto f(1)$$

E basit bağlantılı ise ϕ bijektiftir.

$\phi: \pi_1(\mathbb{R}P^2, [x_0]) \rightarrow p^*([x_0])$ bijektiftir.

$\parallel$
 $\{x_0, -x_0\}$
(2 elemanlı küme)



$\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0)$ mertebesi 2 olan gruptur.

Mertebesi 2 olan bir grup $\mathbb{Z}_2$ 'ye izomorftur. $\square$

Homoloji konusuna başlamadan önce de aldığımız soruya tekrar bakalım:

Elimizde iki uzay var, örneğin S^2 ve T . Bu iki uzay homeomorf mu?

Eğer biri bir topolojik özelliği sağlıyorsa, diğeri ise sağlamıyorsa (ve ya bir topoloji inversi iki uzayda farklı değerler veriyorsa) uzaylar homeomorf değildir.

S^2 ve T örneğine dönersek, iki uzay da kompakt, bağlantılı, yol bağlantılı, Hausdorff...

Fakat $\pi_1(S^2) \cong 0$ ve $\pi_1(T) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ bulduk.

Böylece $S^2 \not\cong T$ olduğunu söyledik.

Şimdi bu prosedürü tek tek yazalım:

topolojik soru

(topolojik bilgilerle çözemedik)



FUNKTOR* ile

Soruyu "sayı cebiri" taşı.



Soruyu cebir bilgileri ile çöz.



Topolojiye geri dön.

topolojik çözümü yaz

SORU: Yukarıdaki prosedürü başka alanlarda da uygulayabilir miyiz? Örneğin, manifoldlarda çözemediğimiz soruyu halkalara taşıyıp orada çözüp tekrar manifoldlara geri dönüp çözümü tamamlamak mümkün mü?

Tanım. Bir $\mathcal{C}$ kategorisi aşağıdaki bilgilerden

oluşur:

- $Ob(\mathcal{C})$: $\mathcal{C}$ 'nin objelerinin sınıfı.
- $Hom(\mathcal{C})$: $\mathcal{C}$ 'nin morfiizmlerinin sınıfı.
(ve ya $Mor(\mathcal{C})$)

$f \in Hom(\mathcal{C})$, $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ olm. öz.

f 'in domain'i f 'in codomain'i

$f : X \rightarrow Y$ 'dir ve şunları sağlar :

Notasyon. $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$: Domain'i X ve Codomain'i Y olan tüm morfiizmaların sınıfıdır.

$X, Y, Z \in Ob(\mathcal{C})$ için

$$\circ : Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow Hom_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

$$(f, g) \longmapsto g \circ f$$

düzenlene **bileşke (composition)** denir. Morfiizmaların şu şartları sağlamak zorundadır :

$$(i) (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

(ii) $\forall X \in Ob(\mathcal{C})$ için $\exists \text{ } \underset{\substack{\text{birim morfiizma} \\ \text{(identity morphism)}}}{Id_X} \in Hom_{\mathcal{C}}(X, X)$ vardır ki

(identity morphism)

$$f \circ \text{Id}_X = f \quad (\forall f \in \text{Hom}_e(X, Y) \text{ için}) \quad \& \\ \text{Id}_X \circ g = g \quad (\forall g \in \text{Hom}_e(\mathbb{E}_1 X) \text{ için}).$$

$\text{Mor}_e(X, Y)$ ile de gösterilir.

Eğer $\mathcal{E}$ kategorisine vurgu yapılmayacak ise $\text{Hom}(X, Y)$ ve ya $\text{Mor}(X, Y)$ de yazılabilir.

Not: $\text{Ob}(\mathcal{E})$ ve $\text{Hom}(\mathcal{E})$ küme değildir (genelde).

$\text{Ob}(\mathcal{E})$ ve $\text{Hom}(\mathcal{E})$ için sınıf diyeceğiz. Bazı kategorilerde bunlar küme olmak için fazla büyüktürler. Örneğin,

$\text{Set} = \text{Kümeler Kategorisi}$ için

$\text{Ob}(\text{Set}) = \text{Tüm kümelerin sınıfı.}$

$\text{Hom}(\text{Set}) = \text{Kümeler arasındaki tüm fonksiyonların sınıfı.}$



İkisi de küme değildir.

NEDEN?

Tüm kümelerin kümesini kolaylık olması açısından

Tüm kümelerin kümesini kolaylık olması açısından $\mathcal{R}$ ile göstereyim.

Eğer $\mathcal{R}$ bir küme ise $\mathcal{R} = \{ \dots, \mathcal{R}, \dots \}$

olur. Yani $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$.

tüm kümeleri barındırır

$\mathcal{R}$ 'nin küme olduğunu söyledik.

Anlamak için şöyle düşünelim:

Bir sepetin içine tüm sepetleri koyabilir miyiz?

Hayır. Çünkü bu sepetin içine "kendisini" de koymamız gerekir.



Bakınız: Russell Paradoksu

- Eğer $\text{Ob}(\mathcal{C})$ ve $\text{Hom}(\mathcal{C})$ küme ise $\mathcal{C}$ 'ye küçük kategori (small category) denir.

ÖRNEK.

$\mathcal{C}$	$\text{Ob}(\mathcal{C})$	$\text{Hom}(\mathcal{C})$
Set	kümeler	Fonksiyonlar
Grp	Gruplar	Grup Homomorfizmaları

Grp	Gruplar	Grup Homomorfizmaları
Ab	Abel Gruplar	Grup Homomorfizmaları
Ring	Halkalar	Halka Homomorfizmaları
Top	Topolojik Uzaylar	Sürekli Dönüşümler
Man	Topolojik Manifolddlar	Sürekli Fonksiyonlar
$\text{Vec}_{\mathbb{R}}$	Reel Vektör Uzaylar	$\mathbb{R}$ - Lineer Dönüşümler
$\text{Vec}_{\mathbb{C}}$	Kompleks Vektör Uz.	$\mathbb{C}$ - Lineer Dönüşümler
Smp	Simpleksel Kompleksler	Simpleksel Dönüşümler

Aşağıdaki örnek Cebirsel Topoloji'de önemli rol oynar.

ÖRNEK. (X, p) pointed space olsun.

topolojik
uzay

X 'te sabit bir
taban noktası (base point)

Öncelikle **pointed map** tanımından bahsedelim.

$f: (X, p) \rightarrow (Y, q)$ **pointed map** denir.



$f: X \rightarrow Y$ dönüşüm ve $f(p) = q$ olur.

Top_* : Pointed topolojik kategori

$\text{Ob}(\text{Top}_*)$: Pointed uzaylar

$\text{Hom}(\text{Top}_*)$: Pointed sürekli dönüşümler

Tanım. $\mathcal{C}$ kategorisinde $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ morfiizması aşığıdaki özelliğı sağılıyorsa f 'ye **izomorfizma** denir :

$\exists g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ vardır ki $f \circ g = \text{id}_Y$ ve $g \circ f = \text{id}_X$.

ÖRNEK.

$\mathcal{C}$	izomorfizma
Set	Bijeksiyon
Top	Homeomorfizma
Grp	Grup izomorfizması

Tanım. $\mathcal{D}$ 'ye $\mathcal{C}$ 'nin **alt kategorisi** denir.



$\text{Ob}(\mathcal{D}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$ 'nin elemanlarının bazıları.

$\text{Hom}(\mathcal{D}) = \text{Hom}(\mathcal{C})$ 'nin elemanlarının bazıları.

(ayrıca bileşke ve birim morfiizma $\mathcal{C}$ 'den gelir)

Tanım. $\mathcal{D}$ 'ye $\mathcal{C}$ 'nin full alt kategorisi denir.



$\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$ 'nin alt kategorisidir.

&

$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$ olm. $\forall$.

ÖRNEK.

- 1) Ab , Grp 'nin full alt kategorisidir.
- 2) Man , Top 'un full alt kategorisidir.

ÖRNEK.

- 1) Grp , Set 'in alt kategorisidir. Çünkü
 - $\forall G \in \text{Ob}(\text{Grp})$ için $G \in \text{Ob}(\text{Set})$ 'tir.
(Her grup aynı zamanda bir kümedir)
 - $\forall f \in \text{Hom}(\text{Grp})$ için $f \in \text{Hom}(\text{Grp})$ 'dir.
(Her grup homomorfizması aynı zamanda bir fonksiyondur.)

2) Set , Grp 'ın alt kategorisi değildir. **NEDEN?**

ÖRNEK. ("Alt kategori" olup "full alt kategori olmama" örneği)

Grp , Set 'in full alt kategorisi değil. Çünkü

$\exists f: G \rightarrow H$ fonksiyonu bulabiliriz ki, f grup homo. değildir (burada G ve H grup olm. dı.)

(Ödev: Böyle bir f bulunuz)

Yani $\exists f \in \text{Hom}_{\text{Set}}(G, H)$ vardır ki $f \notin \text{Hom}_{\text{Grp}}(G, H)$.

($G, H \in \text{Ob}(\text{Grp})$ olm. dı.)

Bir başka deyişle, $\text{Hom}_{\text{Set}}(G, H) \neq \text{Hom}_{\text{Grp}}(G, H)$.

($G, H \in \text{Ob}(\text{Grp})$ olm. dı.)

Bu bölümün başında bahsettiğimiz topolojideki sonucu soyut cebire (aslında Top 'taki sonucu Grp 'a) taşımak için Funktorlara ihtiyacımız olduğunu not ettük. Şimdi funktör tanımını verelim.

Kovaryant (covariant) funktör de denir.

Tanım. $\mathcal{C}$ 'den $\mathcal{D}$ 'ye funktör, aşağıdaki şartları sağlayan dönüşümler koleksiyonudur ve $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ile gösterilir.

- $F: \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$ (objeyi objeye gönderir)
- $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ için

$F: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ öyle ki (morfizimleri morfizmlere gönderir)

bileşke ve birim morfizimler korunur:

$$F(g \circ h) = F(g) \circ F(h) \quad \& \quad F(1_X) = 1_{F(X)}.$$

⚡ Bazen indirgenmiş morfizma olarak $F(g)$ yerine g_* da yazılır.

NOT: 2 adet fonktor vardır: 1. kovariant.
2. kontravariant.

ÖRNEK. $\pi_1: \text{Top}_* \rightarrow \text{Grp}$ fonktordur.

$$\text{Ob}(\text{Top}_*) \ni X \mapsto \pi_1(X) \in \text{Ob}(\text{Grp})$$

$$\text{Hom}_{\text{Top}_*}(X, Y) \ni f \mapsto \pi_1(f): \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$$

$\uparrow$ f_* ile gösterdik.

ÖRNEK. $\pi_0: \text{Top} \rightarrow \text{Set}$ fonktordur.

$$\text{Ob}(\text{Top}) \ni X \mapsto \pi_0(X) \in \text{Ob}(\text{Set})$$

$\uparrow$ X 'in yol bağlantılı
bileşenlerinin kümesi

$$\text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y) \ni f \mapsto \pi_0(f): \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$$

Her $f: X \rightarrow Y$ sür. dñ. için $\pi_0(f) = f_*: \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$

dönüşüm X 'in x_0 yol bileşenini Y 'nin $f(x_0)$ 'ı

içeren yol bileşenine götürür - Topoloji dersinden
biliyoruz.

ÖRNEK.

1) Herhangi $\mathcal{C}$ kategorisi için $1_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ birim fonktordur.



- $\forall C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ için $1_{\mathcal{C}}(C) = C$.

- $\forall f \in \text{Hom}(\mathcal{C})$ için $1_{\mathcal{C}}(f) = f \in \text{Hom}(\mathcal{C})$.

2) $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ kategorileri için $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ **sabit** funktordur.



- $F, \forall C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 'yi tek bir $D \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ 'ye gönderir.

- $F, \forall f \in \text{Hom}(\mathcal{C})$ 'yi $\text{Id}_D \in \text{Hom}(\mathcal{D})$ birim morfizmasına gönderir.

3) Forgetful Funktor

Forgetful funktorun net bir tanımı yoktur ve

$F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 'ye forgetful funktor demek için $\mathcal{C}$ 'deki objelerin bazı özellikleri unutulması istenilir.

Örneğin,

$F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ şu şekilde tanımlansın:

- $F, C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ objesinin " $\mathcal{C}$ 'deki özelliğini unutmaz" ve C 'nin altında yatan kümesine gönderir.

- Benzer şekilde $F, f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ morfizmasını

$f: X \rightarrow Y$ fonksiyonuna g $\ddot{u}$ st $\ddot{u}$ kl $\ddot{u}$ r.

(time time

↓ Bazı kaynaklarda
forgetful functor bu
şekilde tanımlanmıştır.

Bunu da örnekleirelim:

$$F: \text{Grp} \rightarrow \text{Set}$$

$\text{Ob}(\text{Grp}) \ni G \text{ grup} \mapsto \mathcal{T}(G) = G$ kümesi

$$\left(\text{Hom}(\text{Grp}) \ni f : \underset{\text{grp}}{G} \rightarrow \underset{\text{grp}}{H} \underset{\text{homo.}}{} \right) \mapsto \left(\hat{f}(f) = f : \underset{\text{kame}}{G} \rightarrow \underset{\text{kame}}{H} \underset{\text{for kame}}{} \right)$$

Bir başka forgetful dinge:

$$\mathcal{P}: \text{Ring} \rightarrow \text{Ab}$$

$$\text{Ob}(\text{Ring}) \ni C \longmapsto C \in \text{Ob}(\text{Ab})$$

C'deki garpın işlemi unutulur.

Tanım. Kontravariant fonktörler, şu özellik dışında kovariant fonktörler gibi tanımlanır.

$$\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D} \text{ olm. sz.}$$

$$g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longmapsto \mathcal{F}(g) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(X))$$

&

$$\mathcal{F}(g \circ h) = \mathcal{F}(h) \circ \mathcal{F}(g) \text{ 'dir.}$$

Kontravariant fonktörlerde indirgenmiş morfizma için $\mathcal{F}(g)$ yerine g^* de yazılır.

ÖRNEK. Cebirsel topolojide iki önemli fonktör daha:

1. Homoloji fonktörü (H_n) – kovariant.

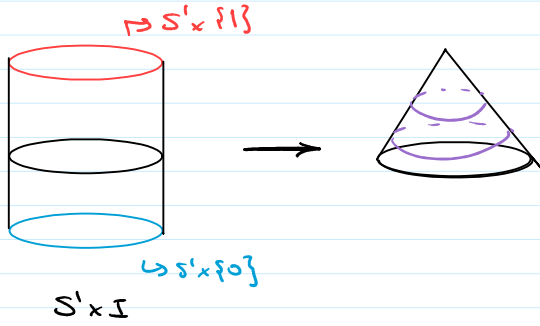
$$\hookrightarrow \text{Kabaca } H_n : \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$$

2. Kohomoloji fonktörü (H^n) – kontravariant.

$$\hookrightarrow \text{Kabaca } H^n : \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$$

Tanım. X top. uz. olsun. $X \times I / X \times \{1\}$ bölüm uzayına X 'in konisi (cone) denir ve CX ile gösterilir.

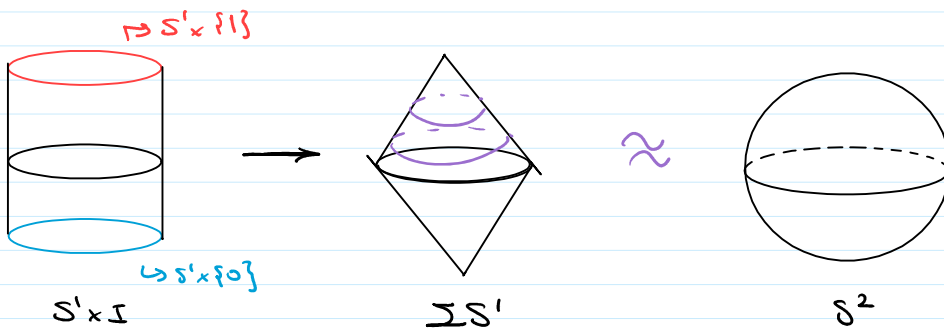
ÖRNEK. $CS' = S' \times I / S' \times \{1\}$



NOT: Bazı kaynaklarda $CX = X \times I / X \times \{0\}$ olarak formülür - ki bu bizim tanımımızdaki koniye homeomorftur.

Tanım. X top. uz. olsun. $X \times I / X \times \{0,1\}$ bölüm uzayına X 'in süspansiyonu denir ve ΣX ile gösterilir.

ÖRNEK. $\Sigma S' = S' \times I / S' \times \{0,1\} \approx S^2$ olur.



Tanım. X, Y top. uz. olsun. $A \subseteq X$ kapalı ve $f: A \rightarrow Y$ sür.
olsun. $X \sqcup Y$ 'de $\sim$ denklik bağıntısı şu şekilde verilsin.

$$\forall a \in A \text{ için } a \sim f(a).$$

Bu durumda $X \sqcup Y / \sim$ bölüm uzayına Y 'nin X 'e eklenmiş
(adjunction space)

uzayı /ekli uzay denir ve $X \cup_f Y$ ile gösterilir.

ÖRNEK. $X = I$ & $Y = \{*\}$ uzayları verilsin.

$A = \{0, 1\} \subseteq X$ kapalı kümesini alalım. $f: A \rightarrow Y$ sabit dön.
verilsin (sürekli).

$$x \sim f(x), \text{ yani, } \underset{\substack{\nearrow \\ A}}{0} \sim * \text{ ve } \underset{\substack{\nearrow \\ A}}{1} \sim * \text{ dir.}$$

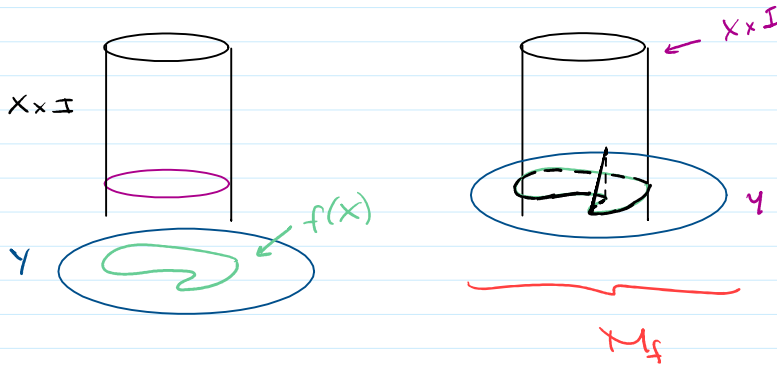
$$\text{Böylece } X \cup_f Y = [0, 1] \cup_f \{*\} / 0 \sim *, 1 \sim * \approx S^1 \text{ olur.}$$

Ödev. $X = D^2$ ve $Y = \{*\}$ olsun. $A = \partial D^2 \subseteq D^2$ kapalı kümesi
verilsin. $f: \partial D^2 \rightarrow Y$ sabit fonksiyonu için $X \cup_f Y$ 'yi
bulunuz.

Tanım. X ve Y topolojik uzay olsun. $f: X \rightarrow Y$ sürekli dörüşüm olsun. $(X \times I) \sqcup Y / f(x) \sim (x, 0)$ bilem uzayına f 'in "mapping cylinder"i denir ve M_f ile gösterilir.

NOT: Bazı kaynaklarda $(X \times I) \sqcup Y / f(x) \sim (x, 1) = M_f$ olarak tanımlanır. Bu uzay yukarıdaki tanımdaki uzayla topolojik olarak aynıdır (homeomorftur).

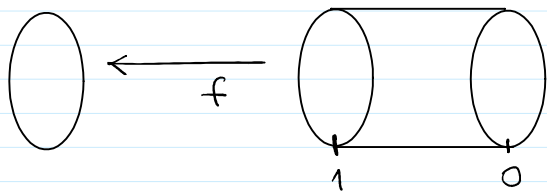
ÖRNEK.

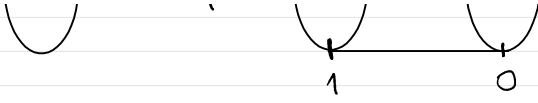


ÖRNEK. $f: S^1 \rightarrow S^1$ fonksiyonunun mapping cylinder'inin $z \mapsto z^2$

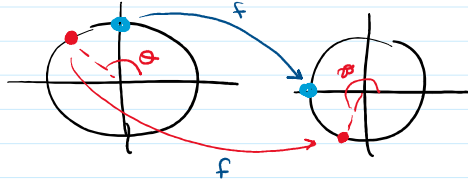
Möbius seridi olduğunu gösteriniz.

$$M_f = (S^1 \times I) \sqcup S^1 / f(z) \sim (z, 0)$$

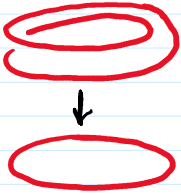




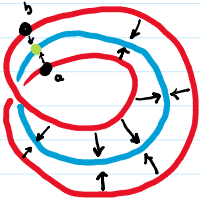
$f: S^1 \rightarrow S^1$ i, $f: [0, 2\pi) \rightarrow S^1$ olarak yazalım.
 $z \mapsto z^2$ $\theta \mapsto e^{i2\theta}$ olarak yazalım.
 (Note: $e^{i2\theta}$ is highlighted in yellow in the original image)



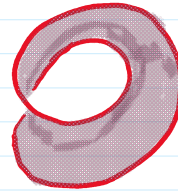
f, S^1 i 2 defa sarar.



$X = S^1$
 $\downarrow f$
 $Y = S^1$

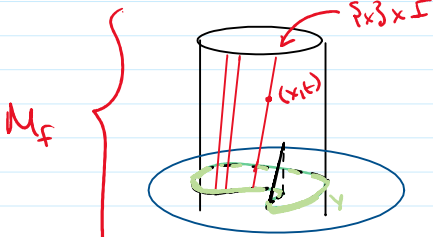


$f: z \mapsto z^2$ şu şekilde algılanabilir.
 a ve b'yi aynı yeşil noktaya taşıyor.



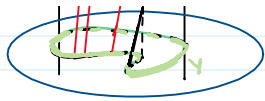
Möbius Şeridi

Teoreu. M_f, Y' ye güçlü deformasyon rektiftir.



Geometrik Yorumu:

$(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times I \subset M_f$ noktası,
 $\mathbb{R}^3 \times I$ doğru parçası boyunca ilerleyerek
 $f(x) \in Y$ noktasına gelir.



$f(x) \in Y$ noktasına gelir.

$$\text{İspat. } \left. \begin{aligned} H([x, s], t) &= [x, (1-t)s], \quad x \in X, s, t \in I \\ H([y], t) &= [y], \quad y \in Y, t \in I \end{aligned} \right\} \text{ tanımlayalım.}$$

↓ Düzgen yatalım.

$$H: M_f \times I \longrightarrow M_f$$

$$([y], t) \longmapsto \begin{cases} [x, (1-t)s], & y = (x, s) \in X \times I \text{ ise} \\ [y], & y \in Y \text{ ise} \end{cases}$$

• H , Pasting lemmadan sürekli.

$$\bullet \quad H([y], 0) = \begin{cases} [x, (1-0)s], & y = (x, s) \in X \times I \\ [y], & y \in Y \end{cases}$$

$$= \begin{cases} [x, s], & y = (x, s) \in X \times I \\ [y], & y \in Y \end{cases}$$

$$= \begin{cases} [y], & y \in X \times I \\ [y], & y \in Y \end{cases}$$

$$= [y] = \text{id}_M([y])$$

$$\Downarrow$$

$$H([y], 0) = \text{id}_{M_f}.$$

$$= [f(x)] \text{ (çünkü } (x, 0) \sim f(x) \in Y)$$

$$\bullet H([y], 1) = \begin{cases} [x, 0] & , y = (x, s) \in X \times I \\ [y] & , y \in Y \end{cases}$$

$$= \begin{cases} [f(x)] & , y = (x, s) \in X \times I \\ [y] & , y \in Y \end{cases} \in Y$$

$$\Downarrow$$

$$H([y], 1) \in Y.$$

• Herhangi $[a] \in Y$ alalım.

$$H([a], t) = \begin{cases} [x, (1-t)0] & , a = (x, 0) \in X \times I \\ [a] & , a \in Y \end{cases}$$

$$= \begin{cases} [x, 0] & , a = (x, 0) \in X \times I \\ [a] & , a \in Y \end{cases}$$

$\xleftarrow{\text{red arrow}} [a]$

$$= [a]$$

$$\Downarrow$$

$$\forall [a] \in Y \text{ için } H([a], t) = a. \quad \square$$

ÖRNEK. $\pi_1(\text{Möbius}) \cong \mathbb{Z}$ olduğunu gösteriniz.

Yukarıdaki örnekte Möbius seridi $= M_f$ olduğunu gördük.

$$(f: S^1 \rightarrow S^1 \text{ olm. öz.})$$

$$z \mapsto z^2$$

Teoremden dolayı $Y=S^1$, M_f 'nin güçlü deformatasyon retraktidir.

Diğer taraftan, A, X 'in güçlü deformatasyon retrakti ise

$\pi_1(A) \cong \pi_1(X)$ olur (Teorem). Böylece

$\pi_1(\text{Möbius}) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ bulunur. $\square$

Amaç. "Hücre" denilen yapı bloklarından uzay elde etmek.

Kabaca, küçük (boyutlu) hücrelerden başlayarak, ve onların üzerine büyük (boyutlu) hücreleri yapılandırarak uzay elde edeceğiz. Bu uzaya CW-kompleks denilecek.

Tanım. Açık n -hücre açık n -diske homeomorf olan uzaydır.
(n -cell)

Kapalı n -hücre ise kapalı n -diske homeomorf olan uzaydır.

ÖRNEK.

Açık

Kapalı

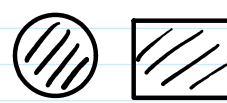
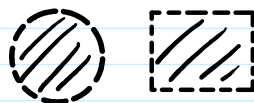
0-hücre



1-hücre



2-hücre



Bir Uzaya n-hücre Nasıl Eklenir?

Tanım: $\emptyset \neq X$ bir uzay olsun. $\varphi : \partial D^n \rightarrow X$ sürekli dönüşüm verilsin. $X \cup_{\varphi} D^n$ ekli (adjunction) uzayına homeomorf olan her uzaya " X 'e φ dönüşümü boyunca n -hücre ekleyerek elde edilmiş uzay" denir. φ 'ye **ekleme dönüşümü** (attaching map) denir.

ÖRNEK. (a) $X = \{*\}$ tek noktadan oluşan uzay olsun.

X 'e 1-hücre ekleyelim:

$\bullet$
 X

$\bullet$ — $\bullet$
 D^1

$\varphi : \partial D^1 \rightarrow X$ sabit fonksiyon

$X \cup_{\varphi} D^1 \approx S^1$ 'dir.

(b) (a)'daki yeni uzaya Y diyelim: $Y = X \cup_{\varphi} D^1$.

Y 'ye 1-hücreyi şu şekilde ekleyelim:

$\overline{\varphi} : \partial D^1 \rightarrow Y$

$\forall x \in \partial D^1$ için $\overline{\varphi}(x) = *$

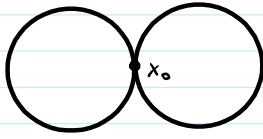
$\Downarrow$

$Y \cup_{\overline{\varphi}} D^1 \approx S^1 \vee S^1$ olur.

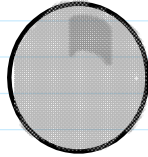
1. $\varphi: \partial D^2 \rightarrow S' \vee S'$

ÖRNEK. $S' \vee S'$ 'e iki farklı şekilde 2-disk ekleyelim:

1.



$S' \vee S'$



2-disk

$$\varphi: \partial D^2 \rightarrow S' \vee S'$$

$$x \mapsto x_0$$

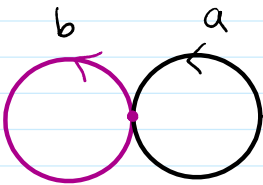
sabit dönüşüm

attaching map olsun.

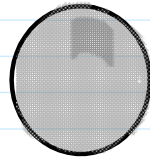


$S' \vee S' \cup D^2$
elde edilir.

2.



$S' \vee S'$



2-disk

$$\varphi: \partial D^2 \rightarrow S' \vee S'$$

Eğer $\varphi, \partial D^2$ 'yi

önce a üzerinden

sonra b —" —

sonra a —" — (ters yönde)

sonra b —" — (ters yönde)

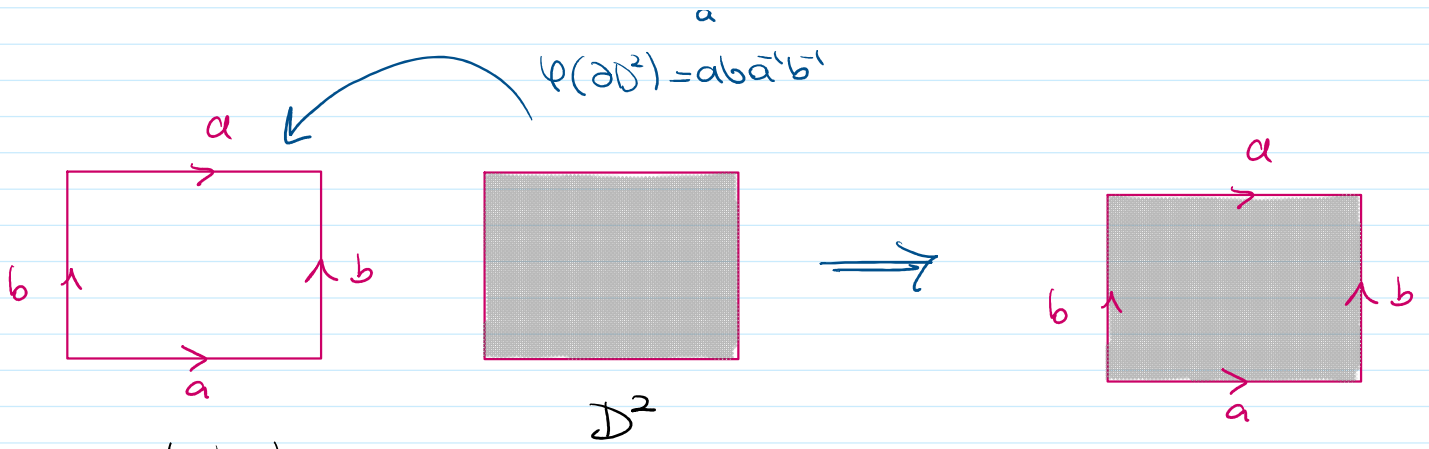
gececek şekilde $S' \vee S'$ 'e

tağırsa, torus elde edilir.

Daha kolay
görmek için:

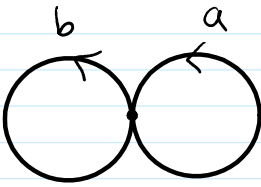
$$\varphi: \partial D^2 \rightarrow \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ b \uparrow \quad \downarrow b \\ \xrightarrow{a} \end{array}$$

$$\varphi(\partial D^2) = aba^{-1}b^{-1}$$



$S^1 \vee S^1$ olarak
görebiliriz
(kalem topu sebebiyle)

Torus
elde edilir.



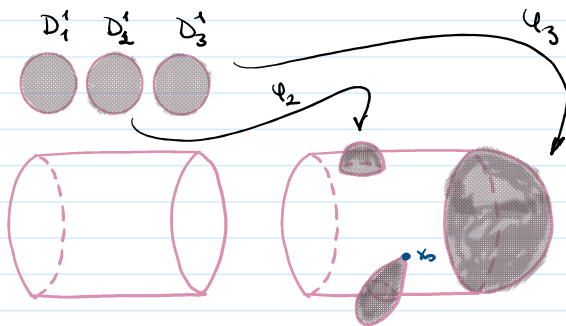
(1) ve (2)'deki uzaylar homotopi denk değildir.

Yani, $S^1 \vee S^1 \vee S^2 \not\sim T$. Çünkü

$$\pi_1(S^1 \vee S^1 \vee S^2) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \neq \pi_1(T) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ 'dir.}$$

Van Kampen Teoremi bölünmüşle göreceğiz.

ÖRNEK. Silindire 3 tane 2-hücre sırayla şu şekilde eklenebilir.



$X = \text{silindir}$



$X = \text{silindir}$

$$\varphi_1: \partial D_1' \rightarrow X$$

$$\forall x \in \partial D_1' \text{ için } \varphi_1(x) = x_0.$$

$$\varphi_2: \partial D_2' \rightarrow X \text{ şekildeki gibi eklensin.}$$

$$\varphi_3: \partial D_3' \rightarrow X \text{ ---''---.}$$



Bu şekilde tek tek φ 'leri eklemek yerine tek hamlede (tek bir fonksiyonla) tüm φ 'leri algılayabileceğimizi bir fonksiyon oluşturalım.

Tanım. $\emptyset \neq X$ bir uzay olsun. $\{D_\alpha\}_{\alpha \in A}$ kapalı n -hücrelerin bir koleksiyonu olsun. $\forall \alpha \in A$ için $\varphi_\alpha: \partial D_\alpha \rightarrow X$ sürekli dönüşümü verilsin.

$$\varphi: \bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha \rightarrow X \text{ dönüşümü şu şekilde tanımlansın: } \varphi|_{\partial D_\alpha} = \varphi_\alpha.$$

Bu durumda $X \cup_\varphi (\bigcup D_\alpha)$ uzayına homeomorf olan her uzaya " X 'e n -hücreler ekleyerek oluşturulan uzay" denir.

ÖRNEK. Yukarıdaki örneğe geri dönersek, 3 tane 2-hücre eklenmiş uzay $X \cup_{\varphi} \left(\bigsqcup_{i=1}^3 D_i^2 \right)$ 'dir ve

burada $\varphi : \bigsqcup_{i=1}^3 D_i^2 \rightarrow X$ öyle ki $\varphi|_{\partial D_i^2} = \varphi_i$ ($\forall i$ için).

Tanım. CW-kompleks şu şekilde inşa edilen bir X uzayıdır:

(1) Boş küme ile başlayın.

(2) $\emptyset$ 'ye 1-hücre ekleyin.



Noktalardan oluşan diskret
uzay elde edilir. X^0 ile gösterelim.

Bir noktanın sınırları boş kümedir.
Bu yüzden attaching map
 $\varphi: \emptyset \rightarrow \emptyset$ ol. şekilde $(\text{tek } \mathbb{N}/\mathbb{N})$
tanımlıdır.

(3) (2)'deki uzaya 1-hücreler ekleyin. $X^{(1)}$ ile gösterelim.

(4) (3)'teki uzaya 2-hücreler ekleyin. $X^{(2)}$ ile gösterelim.

(5) Bu şekilde devam edin. Böylece

$$X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq X^{(2)} \subseteq \dots \subseteq X^{(n)} \subseteq \dots$$

n -iskelet
denir.

şeklinde iç içe geçmiş bir dizi uzay elde edilir.

(6) $X = \bigcup_{n \geq 0} X^{(n)}$ oluşturun ve bu küme üzerinde zayıf (weak)

topolojiyi alın (yani, $U \subseteq X$ açıktır $\Leftrightarrow U \cap X^{(n)}$ açıktır, $\forall n$).

NOT: • Eklenen k -hücreler sonsuz tane olabilir.

• Her boyutta hücre eklemek zorunda değiliz.

(Örneğin, S^2 , 0-hücreye 2-hücre ekleyerek elde edilebilir.)

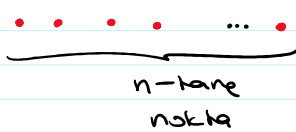
Tanım. X CW-kompleksinin boyutu, X 'in içindeki en büyük boyutlu hücrenin boyutudur. $\dim X$ ile gösterilir.

- $\dim X = n$ ol. şek. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ varsa X sonlu boyutlu denir. Aksi halde X sonsuz boyutlu CW-komplekstir.

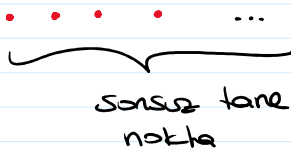
NOT: Eğer sonlu boyutlu CW-komplekslerden bahmediyseniz weak topoloji şartını kontrol etmeye gerek yoktur. Zaten sağlanır.

CW-kompleksin adımbaki "W", weak topolojinin ilk harflerinden gelmektedir.

ÖRNEK:



: 0-boyutlu CW-kompleks.



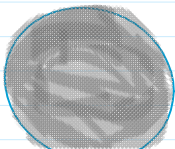
: 0-boyutlu CW-kompleks

ÖRNEK ①

S^2 , 1 tane 0-hücre ve 1 tane 2-hücreden oluşur.

$S^2 = e^0 \cup e^2$ ile de gösterilir. (burada e^n : n-hücredir.)

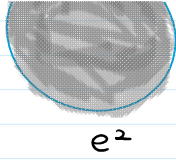
•
 e^0



bu şekilde, S^2 'yi hücrelerine ayrılmış olarak ifade etmeye

0 2 1 " " " " " "

e^0

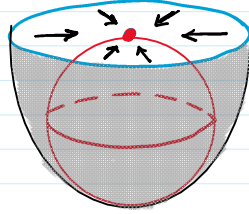


e^2

ayrılmış olarak ifade etmeye

S^2 'nin "hücre decomposition"ıdır.

$\varphi: \partial D^2 \rightarrow e_0$ sabit fonksiyon attaching map.



ÖRNEK ² S^2 'nin bir başka hücre decomposition'ı:

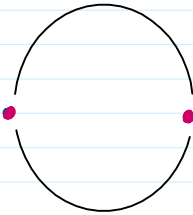
1.



← S^0 elde ederiz.

(2 tane 0-hücre ile başlayın)

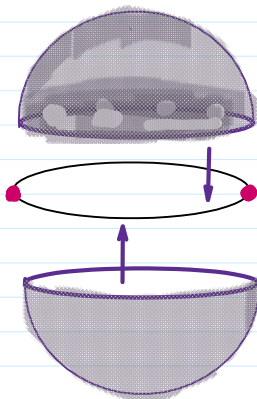
2.



← S^1 elde ederiz.

(2 tane 1-hücre ekleyin)

3.



← S^2 elde ederiz.

(2 tane 2-hücre ekleyin)

(2 tane 2-hücre ekleyin)

ÖRNEK ③. S^n , 1 tane 0-hücre ve 1 tane n -hücre ile elde edilir.
(Örnek ①'deki gibi)

• S^n , Örnek ②'deki gibi de elde edilebilir:

Örnek ②'de S^2 'yi elde ettik.

Eğer S^2 'ye 2 tane 3-hücre eklersek S^3 elde edilir.

(İst yarım küreye ve alt yarım küreye eklemek)

Eğer S^3 'e 2 tane 4-hücre eklersek S^4 elde edilir.

...

Bu şekilde devam edersek S^n 'i elde ederiz.

Tanım. X 'in bir cell-decomposition'ı, X 'in çeşitli boyutlarda açık hücrelere şu şartı sağlayarak şekilde ayrılmasıdır:

Her e hücresi için, $\exists \phi: D \xrightarrow{\text{kapalı } n\text{-hücre}} X$ sürekli
($n \geq 1$ boyutlu)

deneyim vardır ki $\phi(\text{Int } D) \approx e$ &

$\phi(\partial D) =$ boyutu $\leq n$ olan X 'in tüm açık hücrelerinin birleşimi.

Burada ϕ' ye e' nin karakteristik dönüşümü denir.

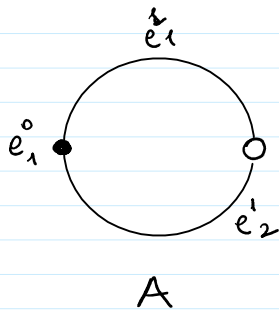
Tanım. X CW-kompleksi olsun.

$A \subseteq X'$ in altkompleksidir. : $\Leftrightarrow A$, X' 'teki hücrelerin birleşimidir.
&

A bir hücre içeriyorsa, A o hücrenin kapanışını da içermek zorundadır.

ÖRNEK. S^2 üzerinde Örnek 2 'deki hücre yapısını alalım. Bu durumda 2 tane 0-hücre ve 2 tane 1-hücre ile inşa edilen S^1 , onun alt kompleksidir.

Ancak



A , S^2 'nin alt kompleksi değildir.

A , S^2 'nin e_1^0, e_1^1 ve e_2^1

hücrelerinden oluşur. Fakat

e_1^1 , A 'da olmasına rağmen

$cl(e_1^1)$, A 'da değildir.

ÖRNEK. $S^3 = e^0 \cup e^1$
 $S^2 = e^0 \cup e^2$ } CW-kompleksleri verilsin.

S^2 , S^3 'ün alt kompleksi değildir. Çünkü S^2 'deki

S^2 , S^3 'ün alt kompleksi değildir. Çünkü S^2 'deki e^2 hücresi S^3 'ün hücresi değildir.

ÖRNEK. S^2 ve S^3 , Örnek ③'teki hücre yapısı ile inşa edilsin.
Bu durumda S^2 , S^3 'ün alt kompleksi dir.

Tanım. (HEP - Homotopy Extension Property)

X bir zay ve $A \subseteq X$ olsun.

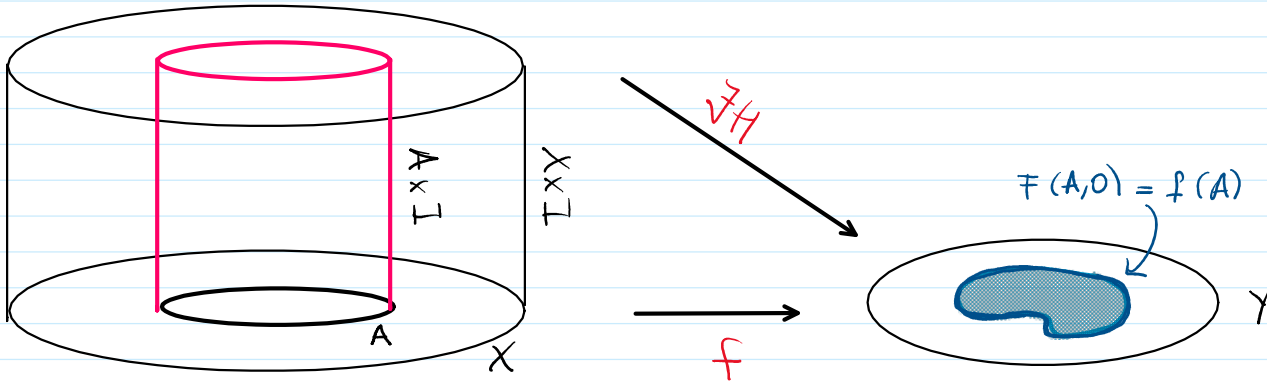
(X, A) çifti HEP'yi : $\iff \forall f : X \rightarrow Y$ sürekli drřim
sağlar.

ve

$\forall F : A \times I \rightarrow Y$ homotopisi iin
 $F(a, 0) = f(a)$

$\exists H : X \times I \rightarrow Y$ homotopisi vardır ki

$H(x, 0) = f(x)$  $H|_{A \times I} = F$ sağlanır.



Teorem¹. (X, A) CW-kompleks çifti HEP'yi saęlasın ve

A addebilir olsun. Bu durumda $q : X \rightarrow X/A$ im drřim
bir homotopi deękliktir.

A bölülebilir olsun. Bu durumda $q: X \rightarrow X/A$ bölüm dönüşümü
bir homotopi eklidir.

SORU: Her CW-kompleks çifti HEP'i sağlar mı?

Cevap: **HAYIR!** Aşağıdaki teoreme bakınız.

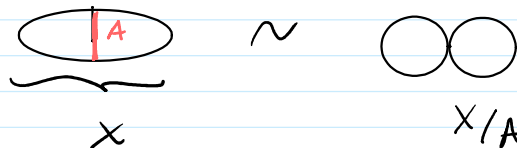
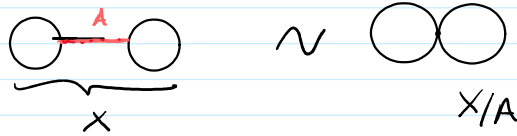
Teorem²: X CW-kompleks ve $A \subseteq X$ kapalı altkompleks ise
 (X, A) çifti HEP'i sağlar.

Teorem¹'de kabaca kastedilen şey:

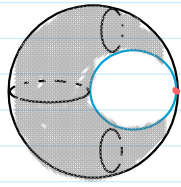
A , X 'in bölülebilir altkompleksi ise

" X 'in A üzerine çökmesi" $\sim X$.

ÖRNEK.

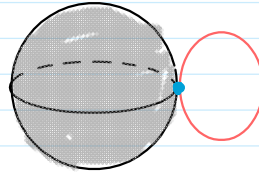


ÖRNEK.



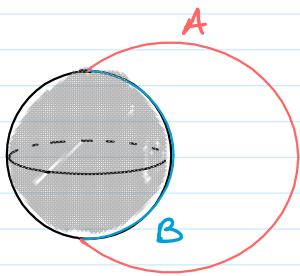
$$S^2/S^0$$

$\sim$

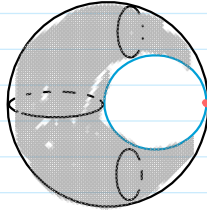


$$S^2 \vee S^1$$

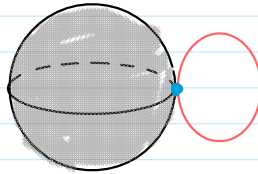
olduğunu gösteriniz.



X



$$X/A = S^2/S^0$$



$$X/B = S^2 \vee S^1$$

Teorem 1' den

A, X'in kapalı alt kompleksi & bağlanabilir $\implies X/A \sim X$

B, X'in " " " " $\implies X/B \sim X$



Homotopi denk olma denklik bağıntısı olduğundan

$$\underbrace{X/A}_{S^2/S^0} \sim \underbrace{X/B}_{S^2 \vee S^1} \quad \square$$

Teorem 1'in İspatı.

Amaç. $q: X \xrightarrow{\sim} X/A$ olduğunu göstermek. Bir başka deyişle,

$\exists g: X/A \rightarrow X$ s.r. dñ. vardır ki $q \circ g \simeq id_{X/A}$ & $g \circ q \simeq id_X$.

1. Adım: $g: X/A \rightarrow X$ sürekli dñ. İnşa edelim.

A bölünebilir olduğundan $id_A \sim c$ ($c: A \rightarrow A$ sabit dñ.) dur.

0 zaman $\exists G: A \times I \rightarrow A$ homotopisi vardır.

$$G(a, 0) = id_A(a)$$

$$G(a, 1) = c(a)$$

$\forall t \in I$ için $G_t: A \rightarrow A$ şeklinde yazalım.

$A \subseteq X$ olduğundan $G_t: A \rightarrow X$ de yazabiliriz.

(aslında kastedilen $A \xrightarrow{G_t} A \hookrightarrow X$ dönüşümüdür.)

Şimdi bu homotopiyi genişleteceğiz.

(X, A) çifti HEP'i sağladığından, özel olarak

$Y = X$ uzayını

$f = id_X: X \rightarrow X$ birim dñ.

$G: A \times I \rightarrow X$ homotopisini

$$(a, 0) \mapsto id_A(a) = id_X(a) = f(a)$$

$$(a, 1) \mapsto c(a)$$

alırsak

$\exists H : X \times I \rightarrow X$ homotopisi vardır ki

$$H(x, 0) = \text{id}_X(x) \quad \& \quad H|_{A \times I} = G \text{ olur.}$$



H_1 'e odaklanalım:

$$\forall a \in A \text{ için, } H(a, 1) = G(a, 1) = c(a) \text{ 'dır. Yani } H_1(A) = \{a\} \text{ olur.}$$

$\parallel$
 $H_1(a)$

Böylece $\exists g : X/A \rightarrow X$ sır. dñ. yazabiliriz ki

$$H_1 = g \circ q \text{ olur.}$$

sır
(homotopiler)

sır
(höl. dñ. olduğundan)

⇓
 g de sırdır.

höl. dñ. jelliği
 $H_1 = g \circ q$ sır
ve q höl. dñ.
ise g de sır.
(Ödev)

2. Adım. $g \circ q \simeq \text{id}_X$ & $q \circ g \simeq \text{id}_{X/A}$ old. gösterelim.

• $g \circ q \simeq \text{id}_X$ 'tir. Çünkü $g \circ q = H_1 \simeq H_0 = \text{id}_X$

(1. adım) H homotopi H tanımı

• $q \circ g \simeq \text{id}_{X/A}$ 'dır. Çünkü:

$$H|_{A \times I} = G. \text{ Yani } H_t|_A = G_t \text{ 'dır.}$$

$$q \circ \pi_t : X \xrightarrow{\pi_t} X \xrightarrow{q} X/A \text{ d\u00f6n\u00fc\u015fm\u00fc}$$

$$(q \circ \pi_t)(A) = q(\pi_t(A)) = q(G_t(A)) \subseteq \underline{q(A)} \text{ y\u0131 sa\u011flar.}$$

$$\pi_t|_A = G_t$$

Tek nokta
oldu\u011funa
dikkat!

$q(A)$ tek nokta oldu\u011fundan $q \circ \pi_t = \bar{\pi}_t \circ q$ yaz\u0131labilir. (*)

($\bar{\pi}_t : X/A \rightarrow X/A$ s\u00fcr olm. v\u0131.)

$\pi_0 = \text{id}_X$ oldu\u011fundan $\bar{\pi}_0 = \text{id}_{X/A}$ 'dir. $\bar{\pi}_1 = q \circ g$ midir?

Eger \u015f\u00f6yle ise $q \circ g \simeq \bar{\pi}_1 \simeq \bar{\pi}_0 = \text{id}_{X/A}$ olur.

$\bar{\pi}_t$ homotopi

$$(*) \text{ 'dan } \bar{\pi}_1 \circ q = q \circ \pi_1 = q \circ (g \circ q) = (q \circ g) \circ q$$

(1. adm)

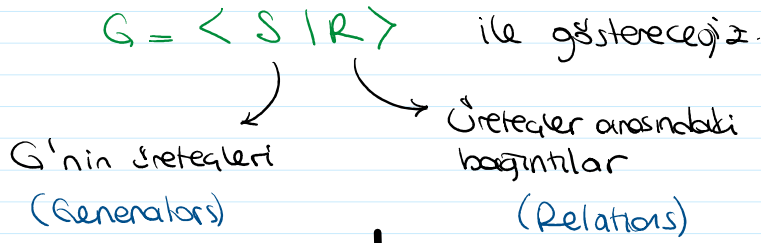
$$\Rightarrow \bar{\pi}_1 = q \circ g. \square$$

q k\u00f6l\u0131m d\u0131\u015f. oldu\u011fundan
s\u00fcrjektivdir. s\u00fcrj. oldu\u011fundan
sa\u011f tersi var.

Ödev: Serbest grup & Serbest grupları araştırıp öğreniniz.

Amaç: Bir G grubunu kısa ve anlaşılır biçimde yazmak.

G 'nin gösterimini (presentation of G)



Böylece G 'nin tüm yapısını anlarız.

- $G = \langle S \mid R \rangle$ grup gösteriminde (finitely generated)
 - eğer S sonlu ise G 'ye sonlu geniler
 - eğer S ve R sonlu ise G 'ye sonlu gösterimli (finitely presented)
- denir.

ÖRNEK.

1. $\mathbb{Z}_n \cong \langle \alpha \mid \alpha^n = 1 \rangle$ (ve ya $\mathbb{Z}_n = \langle \alpha \mid \alpha^n \rangle$ ile gösterilir.)

2. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong \langle \beta, \gamma \mid \beta^2 = 1, \gamma^2 = 1, \beta\gamma = \gamma\beta \rangle$

3. $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \langle \beta, \gamma \mid \beta^m = 1, \gamma^n = 1, \beta\gamma = \gamma\beta \rangle$

4. $\mathbb{Z} \cong \langle \alpha \mid \phi \rangle$

↖ boş k'ne (relation yok)

5. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \langle \beta, \tau \mid \beta\tau = \tau\beta \rangle$

(veya $\langle \beta, \tau \mid \beta\tau\beta^{-1}\tau^{-1} \rangle$ ile de gösterilir.)

Teorem. $G = \langle x_1, \dots, x_m \mid r_1, \dots, r_n \rangle$ ve $H = \langle y_1, \dots, y_k \mid t_1, \dots, t_\ell \rangle$

ise $G * H = \langle x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k \mid r_1, \dots, r_n, t_1, \dots, t_\ell \rangle$ olur.

ÖRNEK. $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong \langle \beta, \tau \mid \emptyset \rangle = \langle \beta, \tau \rangle$.

$\mathbb{Z} \cong \langle \beta \mid \emptyset \rangle$ ↗ $\mathbb{Z} = \langle \alpha \mid \emptyset \rangle$

ÖRNEK. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \cong \langle \alpha \mid \alpha^5 = 1 \rangle$
 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \langle \beta \mid \beta^4 = 1 \rangle$ } verilsin.

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^5 = 1, \beta^4 = 1 \rangle$.

Seifert-Van Kampen Teoremi

Amaç. $X = U \cup V$ ve $U, V \subseteq X$ açık olsun.

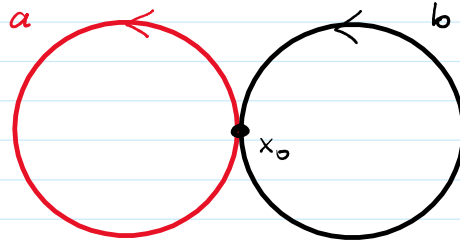
U, V ve $U \cap V$ yol bağlantılı olsun.

$\pi_1(U)$, $\pi_1(V)$ ve $\pi_1(U \cap V)$ biliniyor olsun.



$\pi_1(X)$ 'i bulalım.

Motivasyon. $\pi_1(S' \vee S')$ 'deki x_0 tabanlı loop'ları yazalım.



$$a \in \pi_1(S' \vee S')$$

$$b \in \pi_1(S' \vee S')$$

$$\left. \begin{array}{l} ab \in \text{---}''\text{---} \\ ba \in \text{---}''\text{---} \end{array} \right\} \text{dikkat: } ab \neq ba$$

$$a^3 b^4 \in \text{---}''\text{---}$$

$$b^7 a^2 b^{-1} a^5 b^{10} \in \pi_1(S' \vee S')$$

$$a^{20} a^5 b^{-4} b a = a^{25} b^{-3} a \in \pi_1(S' \vee S')$$

$$\pi_1(S' \vee S') = \langle a, b \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

a ve b birbirini ile alakalı/ilişkili değil!

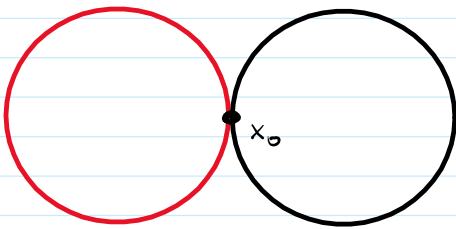
Teorem. (Seifert - Van Kampen Teoreminin Özel Durumu)

X top. uz. olsun. $U, V \subseteq X$ açık olm. öz. $X = U \cup V$ olsun.

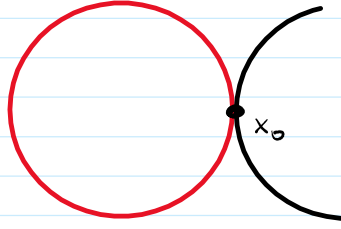
$U \cap V$ basit bağlantılı olsun. Bu durumda

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V) \text{ olur.}$$

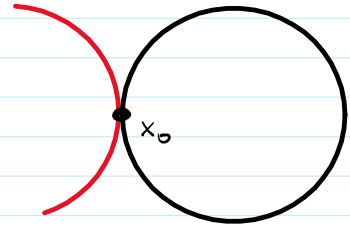
ÖRNEK. (Yukarıdaki motivasyon örneğine dönelim)



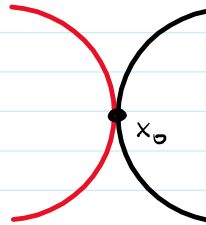
$S' \vee S'$



U



V



$U \cap V$ basit bağlantılıdır.

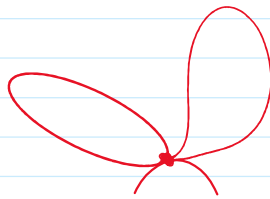
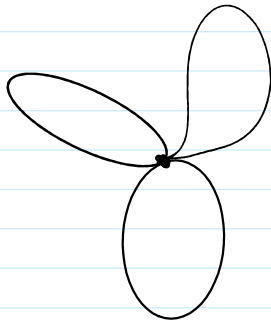
$$U \sim S' \Rightarrow \pi_1(U) \cong \pi_1(S') \cong \mathbb{Z}$$

$$V \sim S' \Rightarrow \pi_1(V) \cong \pi_1(S') \cong \mathbb{Z}$$

Böylece yukarıdaki teoremler dolay,

$$\begin{aligned} \pi_1(S' \vee S') &\cong \pi_1(U) * \pi_1(V) \\ &\cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

ÖRNEK. $\pi_1(S' \vee S' \vee S')$ hesaplayalım.



U



V



$U \vee V$

(basit bağlantılı)

$$U \sim S' \vee S' \Rightarrow \pi_1(U) \cong \pi_1(S' \vee S') \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

$$V \sim S' \Rightarrow \pi_1(V) \cong \pi_1(S') \cong \mathbb{Z}$$

$U \vee V$ basit bağlantılı.

$$\begin{aligned} \text{Böylece } \pi_1(S' \vee S' \vee S') &\cong \pi_1(U) * \pi_1(V) \\ &\cong (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) * \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\cong \bigstar_{i=1}^3 \mathbb{Z}.$$

ÖRNEK. $\pi_1(\bigvee_{i=1}^n S^1) \cong \bigstar_{i=1}^n \mathbb{Z}$ (teoremden).

Ödev: $\pi_1(S^1 \vee S^2)$ 'yi hesaplayınız.

SORU: Teorem'deki $U \cap V$ basit bağlantılı değilse $\pi_1(X)$ nasıl hesaplanır?

Teorem. (Seifert - Van Kampen Teoremi)

X top. uz. olsun. $U, V \subseteq X$ açık olm. öz. $X = U \cup V$ olsun.

$U \cap V$ yol bağlantılı olsun. Bu durumda

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(U) *_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V) \text{ olur.}$$

Tanım. (Amalgamated product)

H, G_1, G_2 grup & $f_1: H \rightarrow G_1$ & $f_2: H \rightarrow G_2$ homomorfizm olsun. G_1 ve G_2 'nin H boyunca amalgamated carpımı (amalgamated product of G_1 and G_2 along H)

$$G_1 *_H G_2 = G_1 * G_2 / \bar{C} \text{ bölüm grubudur (burada}$$

$C = \{ f_1(h) f_2(h)^{-1} \mid h \in H \}$ kümesi & $\bar{C}$, C 'yi içeren $G_1 * G_2$ 'deki en küçük normal alt grup olm. öz.).

Seifert - Van Kampen Teoreminde, amalgamated product

$\pi_1(U) * \pi_1(V)$ 'ye relation kazandırır. Ve bunu şu

şekilde yapar:

$$\left. \begin{array}{l} i: U \cap V \hookrightarrow U \\ j: U \cap V \hookrightarrow V \end{array} \right\} \text{inclusion dönüşümlerini alalım.}$$

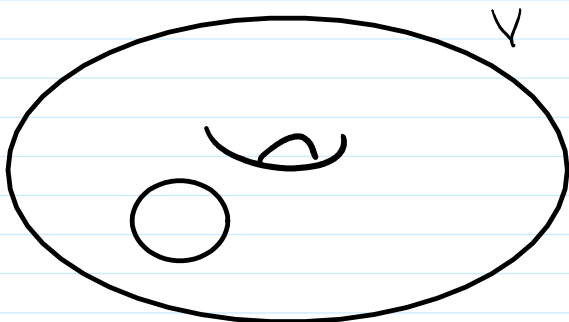
$$\left. \begin{array}{l} i_*: \pi_1(U \cap V) \rightarrow \pi_1(U) \\ j_*: \pi_1(U \cap V) \rightarrow \pi_1(V) \end{array} \right\} \text{indirgermiş dönüşümlerini alalım.}$$

$$r \in \pi_1(U \cap V) \text{ için } i_*(r) = j_*(r).$$

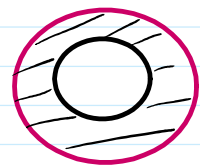
(r 'nin $\pi_1(U)$ ve $\pi_1(V)$ 'deki
görünüşünü birbirine eşler/yapıştırır)

Örnek üzerinde görelim: Torus'u, U ve V 'nin

birleşimi olarak alalım.



$$U = D^2$$

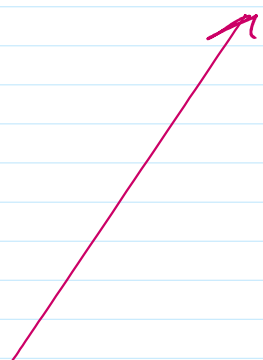


$$U \cup V$$

$$V = T - D^2$$

$$\pi_1(T) \cong \pi_1(T - D^2) * \pi_1(D^2) \cong \langle a, b \mid i_x(\sigma) = j_x(\sigma) \rangle$$

$\pi_1(\text{unv})$



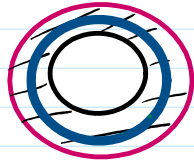
$$\cong \langle a, b \mid 1 = ab\bar{a}b^{-1} \rangle$$

$$\cong \langle a, b \mid ba = ab \rangle$$

$$\cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

$$\iota: U \cap V \hookrightarrow U \Rightarrow \iota_*: \pi_1(U \cap V) \rightarrow \pi_1(U)$$

$$j: U \cap V \hookrightarrow V \Rightarrow j_*: \pi_1(U \cap V) \rightarrow \pi_1(V)$$



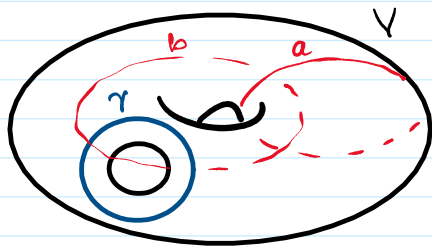
$U \cap V$

$\gamma \in \pi_1(U \cap V)$ alınırsa

$\iota_*(\gamma) \in \pi_1(U) \cong 0$ 'da

birim elementtir.

Aynı γ 'nin $\pi_1(V)$ 'deki görüntüsünü şöyle görebiliriz:



γ 'yı V 'deki bir ısırtı gibi
(simitteki)

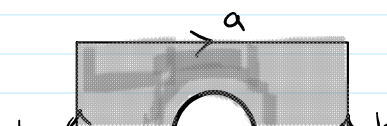
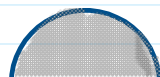
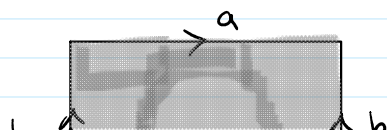
değerlendir. Birinci yarı γ 'yı çekistirin
(gerisletin)

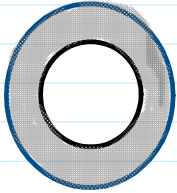
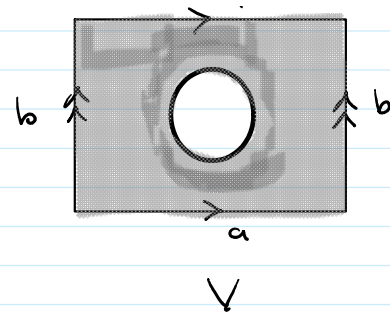
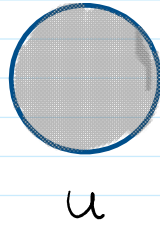
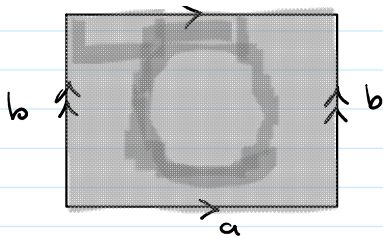
handle'ları parçalamayacak

şekilde (yani V 'nin topolojisini bozmayacak şekilde).

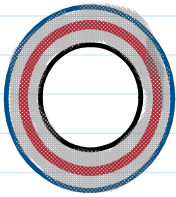
Böylece $j_*(\gamma) = ab\bar{a}\bar{b}$ elde edilir.

ÖRNEK. $\pi_1(T)$ 'yi alternatif olarak şu şekilde de hesaplayabiliriz.

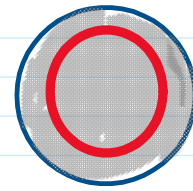




$u \cup v = \text{Annulus}$



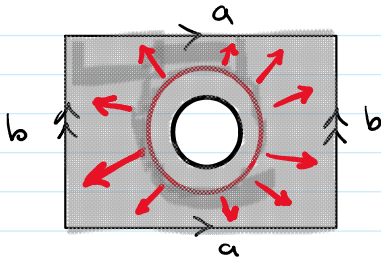
$\gamma \in \pi_1(u \cup v)$ alalım.



u

$i_*(\gamma) = 1 \in \pi_1(u)$

(yani, γ $\pi_1(u)$ 'da)
triviyedir.)



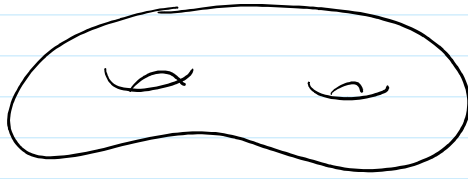
$j_*(\gamma)$ 'yi genişletin. Böylece $j_*(\gamma) = aba^{-1}b^{-1}$ olur.

$$\text{Buradan } \pi_1(\tau) \cong \underbrace{\pi_1(u) * \pi_1(v)}_{\pi_1(u \cup v)} \cong \underbrace{\pi_1(D^2) * \pi_1(\tau - D^2)}_{\pi_1(\text{Annulus})}$$

$$\cong \langle a, b \mid 1 = aba^{-1}b^{-1} \rangle$$

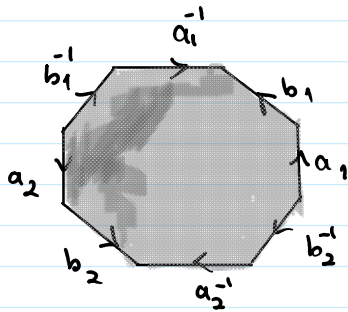
$$\cong 2 \times 2.$$

ÖRNEK.



Σ_2 (oriented surface of genus 2)

$\pi_1(\Sigma_2)'$ yi hesaplayalım.



Σ_2 'nin düzlensel gösterimi

$$\left. \begin{array}{l} U = D^2 \\ V = \Sigma_2 - D^2 \end{array} \right\} \text{alınır. } U \cap V = \text{annulus olur.}$$

Torus'taki benzer şekilde hesapladığımızda

$$\pi_1(\Sigma_2) \cong \pi_1(D^2) * \pi_1(\Sigma_2 - D^2)$$

$\pi_1(\text{annulus})$

$$\cong \langle a_1, b_1, a_2, b_2 \mid 1 = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \rangle$$

bulunur.

ÖRNEK. $\pi_1(\Sigma_n) \cong \langle a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \mid$

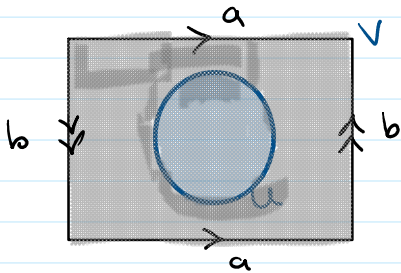
$$1 = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} \rangle.$$

Corollary. $\pi_1(\Sigma_n) \neq \pi_1(\Sigma_m)$ olduğundan ($m \neq n$ için)

- $\Sigma_n \not\cong \Sigma_m$ 'dir.
- $\Sigma_n \not\sim \Sigma_m$ 'dir.

ÖRNEK. $\pi_1(\text{Klein Şişesi})$ 'ni Seifert-Van Kampen

Teoremi ile hesaplayınız.



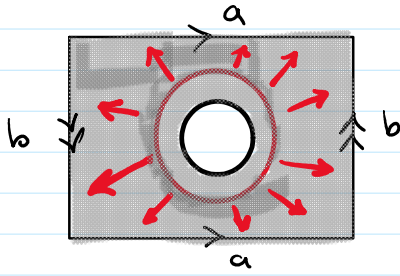
$$U = D^2$$

$$V = \text{Klein Şişesi} - D^2$$

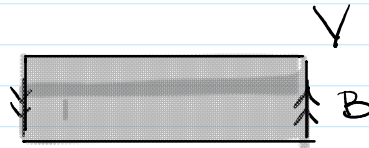
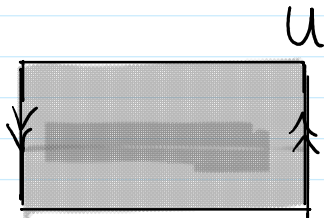
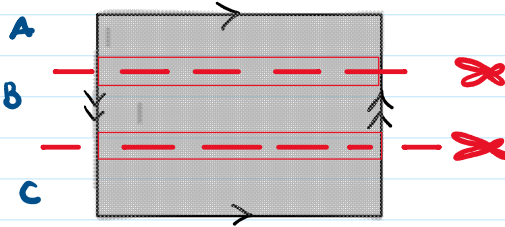
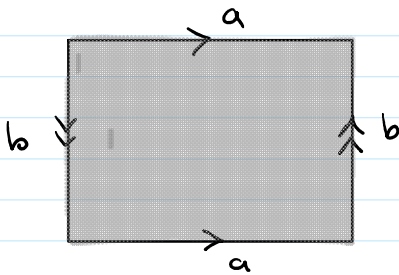
$$U \cap V = S^1$$

$$\pi_1(\text{Klein Şişesi}) \cong \pi_1(D^2) * \pi_1(\text{Klein Şişesi} - D^2) \\ \pi_1(S^1)$$

$$\cong \langle a, b \mid a^{-1}b^{-1}ab = 1 \rangle$$



ÖRNEK. (Alternatif çözüm)



A ve C'nin
a kenarı boyunca
yapıştırılmış görseli.

U ve V Möbius şeritleridir.

$$\pi_1(U) \cong \pi_1(\text{Möbius}) \cong \mathbb{Z}$$

$$\pi_1(V) \cong \mathbb{Z}$$

$UNV = \text{silindir}$ (NEDEN?)

$\downarrow$

$$\pi_1(UNV) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

$\nearrow$

$\text{silindir} \sim S^1$

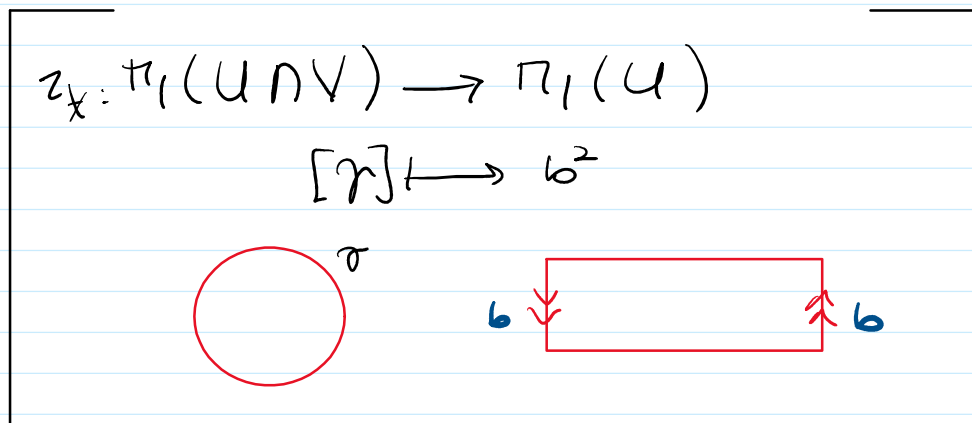
$$\pi_1(\text{Klein Şişesi}) \cong \pi_1(\text{Möbius}) * \pi_1(\text{Möbius})$$

$\pi_1(S^1)$

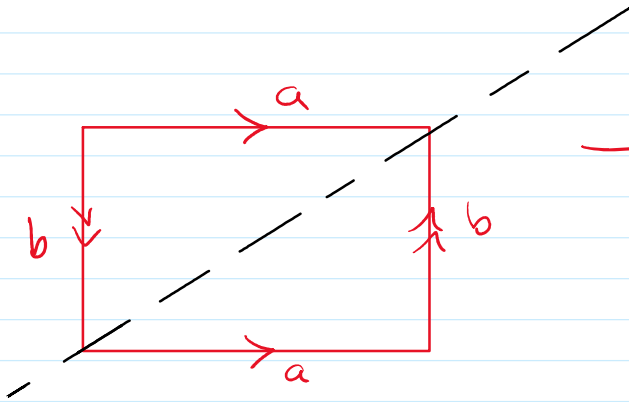
$$\cong \langle b, c \mid b^2 = c^2 \rangle$$



$$\cong \langle b, c \mid b^2 c^{-2} = 1 \rangle$$

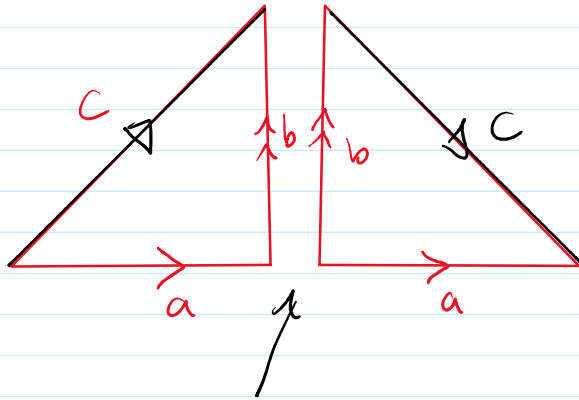


NOT: İki gözlemlerde de aynı şeyi bulduk. Çember :

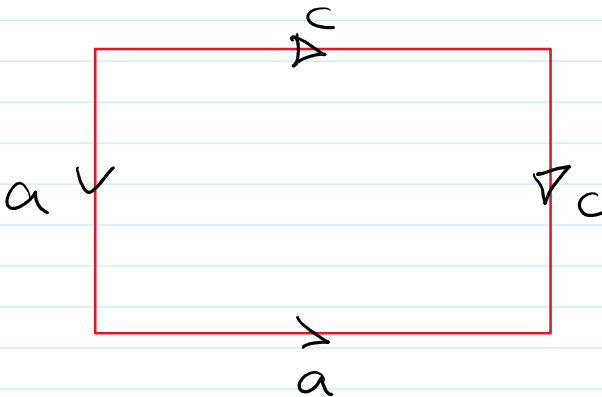


$$\rightarrow \langle a, b \mid \bar{a}'b^{-1}ab^{-1} = 1 \rangle$$

(1. qd2'deki)



b boyunca yapıştırır.



$$\rightarrow \langle a, c \mid aac^{-1}c^{-1} = 1 \rangle$$

(2. qd2'deki)

Örtü uzaylarına kısa bir giriş yaptık ve $\pi_1(S^1)$ 'i hesaplamak için kullandık. Bu bölümde örtü uzaylarını daha detaylıca çalışacağız.

Not: Bundan itibaren örtü dönüşümü $q: \tilde{X} \rightarrow X$ ile göstereceğiz. ve $\tilde{X}$ ve X 'yi yol bağlantılı ve yerel yol bağlantılı alacağız.

Genel olarak "yerel" özellik:

Uzayın her x noktasının her U_x açık komşuluğunun en az bir açık alt kısmı (x 'yi içeren) vardır ki bu özelliği sağlar, demektir.

Hatırlatma.

Teorem. (Monodromi Teoremi)

$q: \tilde{X} \rightarrow X$ örtü dönüşümü ve $p(e_0) = x_0$ olsun.

f ve g , X 'te x_0 'dan x_1 'e yol olsunlar.

$\tilde{f}$ ve $\tilde{g}$ de, f ve g 'nin $\tilde{X}$ 'de $\tilde{x}_0$ 'da başlayan yükseltimimleri olsun. Bu durumda

Olsson. På denna

$$f \sim_p g \iff \tilde{f} \sim_p \tilde{g} \text{ olur.}$$

Theorem. (Homotopy Lifting Property)

$q: \tilde{X} \rightarrow X$ ökl dönüşümü ve γ yerel bağlantılı olsun. $f, g: Y \rightarrow X$

şrekli dönüşümleri için $f \underset{H}{\simeq} g$ doğrulasın ve $\tilde{f}: Y \rightarrow \hat{X}$

f 'in y^ukseltildiği olsun.

Bu durumda H^1 'in tek bir $\tilde{H}: Y \times I \rightarrow \tilde{X}^2$ homotopi

yükseklikleri vardır diye ki $\tilde{H}_0 = \tilde{f}$ olur.

[Lee 11.137]

Theorem. (Unique Lifting Property)

$q: \hat{X} \rightarrow X$ örkle dönüşümü olsun. Y bağılantılı olsun. $f: Y \rightarrow X$ sür.

örüşenen iki yekselilmisi $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2: Y \rightarrow \tilde{X}$, Y 'nin bir tane

noktasında aynı değeri alıyorsa, $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ 'dir.

(hem Y' 'de $\tilde{f}_1$ ve $\tilde{f}_2$ aynı değeri alır)

[Lee 11.12 & Hatcher 1.34]

Is pat.

İspat.

Amaç: $A := \{y \in Y \mid \tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)\}$ kümesi hem açık hem de kapalı ise Y bağlantılı olduğu için $A = Y$ olmalı.

$y \in Y$ için $\exists U \in \mathcal{U}(f(y))$ vardır ki U, q tarafından düzenli örtülür. Böylece $q^{-1}(U)$, her biri U' ya homeomorf olan ayrık açıkların bir birleşimidir. Bu açıklardan $\tilde{f}_1(y)$ ve $\tilde{f}_2(y)$ 'yi içerenlere sırasıyla $\tilde{U}_1$ ve $\tilde{U}_2$ diyelim.

$\tilde{f}_1$ ve $\tilde{f}_2$ 'nin sürekliliğinden $\exists V_1 \in \mathcal{U}(y) : \tilde{f}_1(V_1) \subseteq \tilde{U}_1$,
 $\exists V_2 \in \mathcal{U}(y) : \tilde{f}_2(V_2) \subseteq \tilde{U}_2$.

$\tilde{f}_1 : Y \rightarrow E$ sür. $\Leftrightarrow \forall y \in Y$ için $\forall W \in \mathcal{U}(\tilde{f}_1(y))$ için
 $\exists V \subseteq Y$ açık : $\tilde{f}_1(V) \subseteq W$.

$\Downarrow$
 $N := V_1 \cap V_2$ açığını alalım.

O zaman $\exists N \in \mathcal{U}(y)$ bulduk ki $\tilde{f}_1(N) \subseteq \tilde{U}_1$ & $\tilde{f}_2(N) \subseteq \tilde{U}_2$.

Eğer $\tilde{f}_1(y) \neq \tilde{f}_2(y)$ ise $\tilde{U}_1 \neq \tilde{U}_2$ olur. Böylece

$\tilde{U}_1$ ve $\tilde{U}_2$ ayrık olacağından N üzerinde $\tilde{f}_1 \neq \tilde{f}_2$ olur.





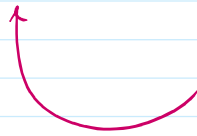
$N = Y \setminus A$ bulunur.

N açık olduğundan

A kapalıdır.

Eğer $\hat{f}_1(y) = \hat{f}_2(y)$ ise $\tilde{U}_1 = \tilde{U}_2$ olur. Böylece N üzerinde

$\hat{f}_1 = \hat{f}_2$ olur.



$$\left[\begin{array}{l} q \circ \tilde{f}_1 = q \circ \tilde{f}_2 \\ \& \\ q, \tilde{U}_1 = \tilde{U}_2 \text{ üzerinde} \\ \text{injektiftir.} \end{array} \right]$$



$N = A$ bulunur.

Böylece A açıktır. $\square$

Teorem. $q: \tilde{X} \rightarrow X$ örtü dönüşümü ve $q(\tilde{x}_0) = x_0$ olsun. Böylece

$q_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ dönüşümü injektiftir &

$$q_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \left\{ [\gamma] \in \pi_1(X, x_0) \mid \gamma \text{'nin } \tilde{x}_0 \text{'da başlayan } \tilde{X}_0 \text{'deki} \right. \\ \left. \mid \text{yükseltilmisleri loop'lar} \right\}.$$

İspat.

$\tilde{x}_0$ 'daki sabit loop

[Hatcher 1.31]

Amaç. $\text{Ker } q_* = \{ [e_{\tilde{x}_0}] \}$ olduğunu göstermek. Bir başka deyişle,

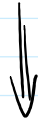
x_0 'daki sabit loop

$$\text{Ker } q_* = \left\{ [\beta] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \mid q_*([\beta]) = [e_{x_0}] \right\} \text{ için } [\beta] = [e_{\tilde{x}_0}] \text{ midir?}$$

$q_*([\beta]) = [e_{x_0}]$ olsun.

$$[q \circ \beta] = [e_{x_0}]$$

$\Downarrow$
 $q \circ \beta \simeq_p e_{x_0} \Rightarrow$ Monodromi Teoreminden $q \circ \beta$ ve e_{x_0} 'in, $\mathbb{F}$ 'de aynı noktada başlayan yükseltilmişleri homotopdur.



$\beta, q \circ \beta$ 'nin $\tilde{x}_0$ 'da başlayan
 $e_{\tilde{x}_0}, e_{x_0}$ 'in $\tilde{x}_0$ 'da başlayan

$\left. \begin{array}{l} \text{(sabit loop)} \\ \text{(sabit loop)} \end{array} \right\}$ yükseltmişleri olduğundan
 $\beta \simeq_p e_{\tilde{x}_0}$ bulunur.

$\Downarrow$
 $[\beta] = [e_{\tilde{x}_0}].$

Teorem'in 2. kısmı için Hatcher/Proposition 1.31'in ispatı. $\square$

Teorem. $q: \tilde{X} \rightarrow X$ örtük dönüşümü için, k 'm fiberlerin (yani $q^{-1}(x)$) kardinalitesi aynıdır.

Buna "number of sheets of the covering" denir.

ÖRNEK. (1) $q: S^1 \rightarrow S^1$ örtük dönüşümü verilsin.

ÖRNEK. (1) $q: S^1 \rightarrow S^1$ örkle dönüşümü verilsin.
 $z \mapsto z^n$

q 'nin bir fiberinin kardinalitesi n 'dir.

(2) $q: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ örkle dönüşümü verilsin.
 $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

q 'nin bir fiberinin kardinalitesi sayılabilir sonsuzluktur.
($\aleph_1$ 'e denktir)

SORU: Sadece homotopilerinde değil (Homotopy Lifting Property), herhangi bir sürekli dönüşümün yükseltilməsi hangi şartlar altında vardır?

Teorem. (Lifting Criterion)

$q: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ örtü dönüşümü olsun. Y yol bağlantılı ve

yerel yol bağlantılı olmak üzere $f: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ herhangi bir sürekli dönüşüm olsun. Bu durumda

f 'in, $\tilde{f}: (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \iff f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq q_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ genişletilebilir.

İspat. Okuma ödevi. John Lee / Sayfa 284 veya Allen Hatcher / Sayfa 62. $\square$

Corollary (Lifting Maps from Simply Connected Spaces)

$q: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ ökl örtüşümü olsun. Y basit bağlantılı ve yerel yol bağlantılı olmak üzere $f: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ herhangi bir sürekli örtüşüm olsun. Bu durumda

$$\underbrace{f_* \left(\underbrace{\pi_1(Y, y_0)}_{=0} \right)}_{=0} \subseteq q_* \left(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \right) \text{ olduğundan}$$

f 'in $\tilde{f}: (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ yâkeltildiği vardır. $\square$

(Kısaca, herhangi f 'in yâkeltildiği vardır.)

Corollary: (Lifting Maps to Simply Connected Spaces)

$q: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ örtük dizişemeli olsun. $\tilde{X}$ basit bağlantılı

olsun. γ yol bağlantılı ve yerel yol bağlantılı olmak üzere

$f: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ herhangi bir sürekli dönüşüm olsun.

Bu drumda

$f^{-1} \cap \tilde{f} : (y_1, y_2) \rightarrow (x_1, x_2)$ yeknelimli mi olur.

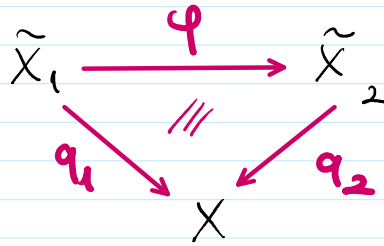


f_* 0-homomorfizmasıdır ($\exists y_0 \in Y$ taban noktası için). $\square$

Soru: İki örtü dönüşümünün "aynı" olduğunu nasıl söyleriz?

Tanım. $q_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$ ve $q_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$ örtü dönüşümleri verilsin.

q_1 'den q_2 'ye örtü homomorfizması aşağıdaki diyagramı kommutatif yapan sürekli $\varphi: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ dönüşümdür.



Eğer φ homeomorfizma ise φ 'ye örtü izomorfizması denir,

$\tilde{X}_1$ ve $\tilde{X}_2$ örtü uzayları izomorfik denir.

(ve ya q_1 ve q_2 izomorfik de denir)

Önerme.

(1) φ örklü izomorfizması ise φ^{-1} de örklü izomorfizmasıdır.

(2) Örklü homomorfizması bir örklü dönüşümdür.

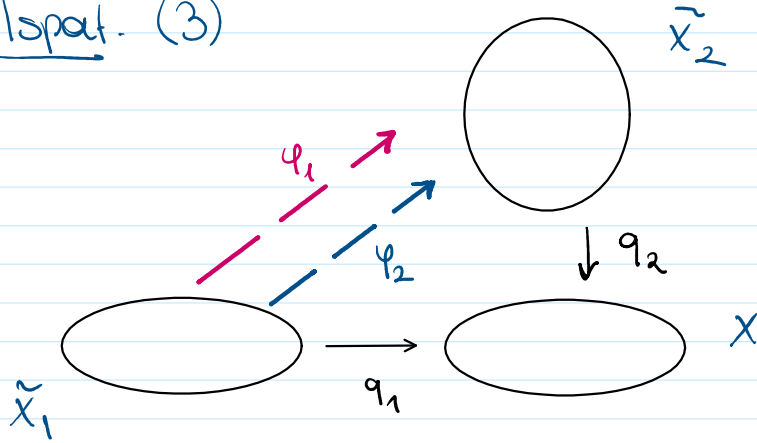
(3) $q_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$ ve $q_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$ örklü dönüşümleri verilsin.

φ_1 ve φ_2 , q_1 'den q_2 'ye iki örklü homomorfizması olsun.

Eğer φ_1 ve φ_2 , $\tilde{X}_1$ 'in tek bir noktasında aynı değeri alıyorsa,

$\varphi_1 = \varphi_2$ dir.

İspat. (3)



φ_1 ve φ_2 örklü homo.

olduğundan

$$q_2 \circ \varphi_1 = q_1$$

&

$$q_2 \circ \varphi_2 = q_1 \text{ olur.}$$



Böylece φ_1 ve φ_2 'yi, q_1 dönüşümünün

yükseltimeleri olarak düşünebiliriz.



Unique lifting teoreminin ispat biter. □

Teoreu. (Covering Homomorphism Criterion)

$q_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$ ve $q_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$ örtü dönüşümleri verilsin.

$\exists e_1 \in \tilde{X}_1$ ve $\exists e_2 \in \tilde{X}_2$ için $q(e_1) = q(e_2)$ sağlansın. Bu durumda

$\exists \varphi$ örtü homomorfizması vardır ($\varphi(e_1) = e_2$ ol. set.)
(q_1 'den q_2 'ye)



$$q_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, e_1)) \subseteq q_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, e_2)).$$

İspat. Önerme (3) ispatında φ 'nin q_1 'in bir yitkelliği olduğu

olduğunu söylemiştik. Bu durumda lifting kriterini uygulayarak

$$q_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, e_1)) \subseteq q_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, e_2)) \text{ bulunur. } \square$$

Teorem. (Covering Isomorphism Criterion)

$q_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$ ve $q_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$ örtk' dönüşümleri verilsin.

$q_1(e_1) = q_2(e_2)$ şartını sağlayan $e_1 \in \tilde{X}_1$ ve $e_2 \in \tilde{X}_2$ verilsin. Bu durumda

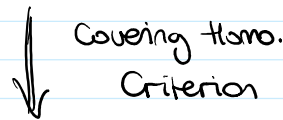
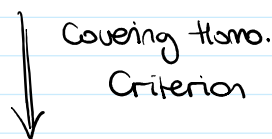
$\exists \varphi$ örtk' izomorfizması vardır ($\varphi(e_1) = e_2$ ol. set.)
(q_1 'den q_2 'ye)



$$q_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, e_1)) = q_{2*}(\pi_2(\tilde{X}_2, e_2)).$$

İspat. $\Rightarrow$: $\varphi: (\tilde{X}_1, e_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, e_2)$ örtk' izomorfizması olsun.

Böylece $q_2 \circ \varphi = q_1$ & $q_1 \varphi^{-1} = q_2$ sağlanır.



$$q_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, e_1)) \subseteq q_{2*}(\pi_2(\tilde{X}_2, e_2)) \quad q_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, e_2)) \subseteq q_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, e_1))$$



$$q_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, e_1)) = q_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, e_2)).$$

$\Leftarrow$: $q_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, e_1)) = q_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, e_2))$ sağlansın.

Lifting kriterinden $q_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$ dönüşümü $\tilde{q}_1$ 'e yükeltirir

($q_2 \tilde{q}_1 = q_1$). Benzer şekilde $q_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$ de $\tilde{q}_2$ 'ye yükeltirir

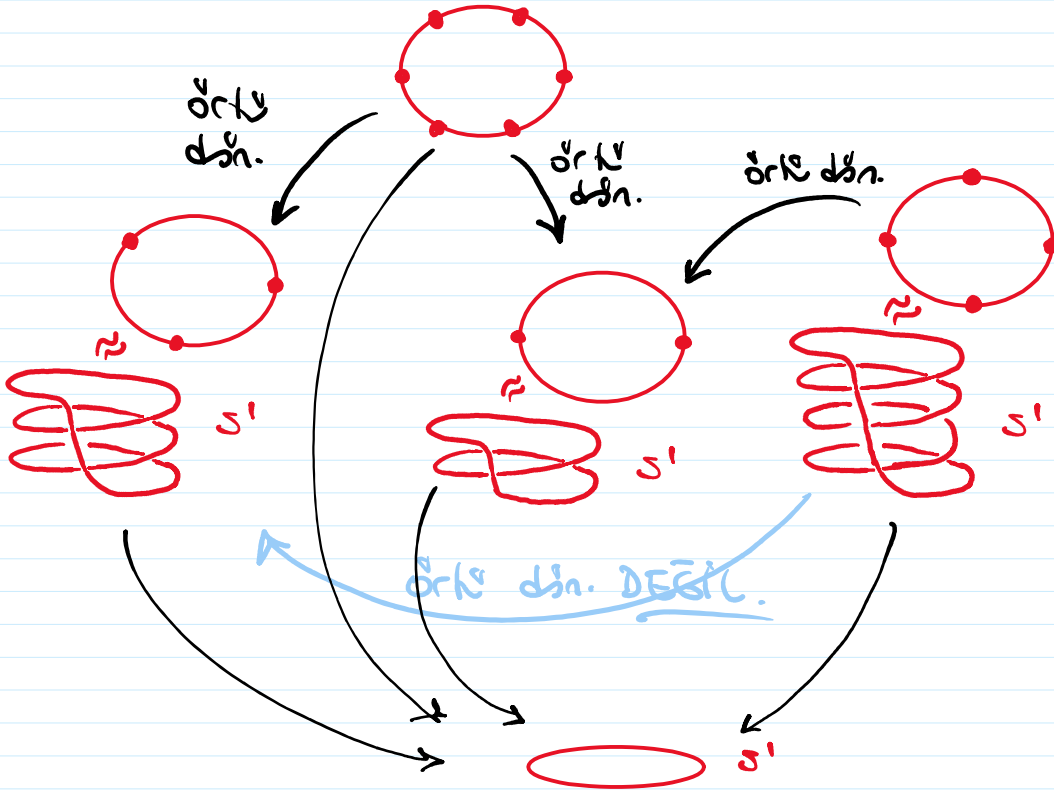
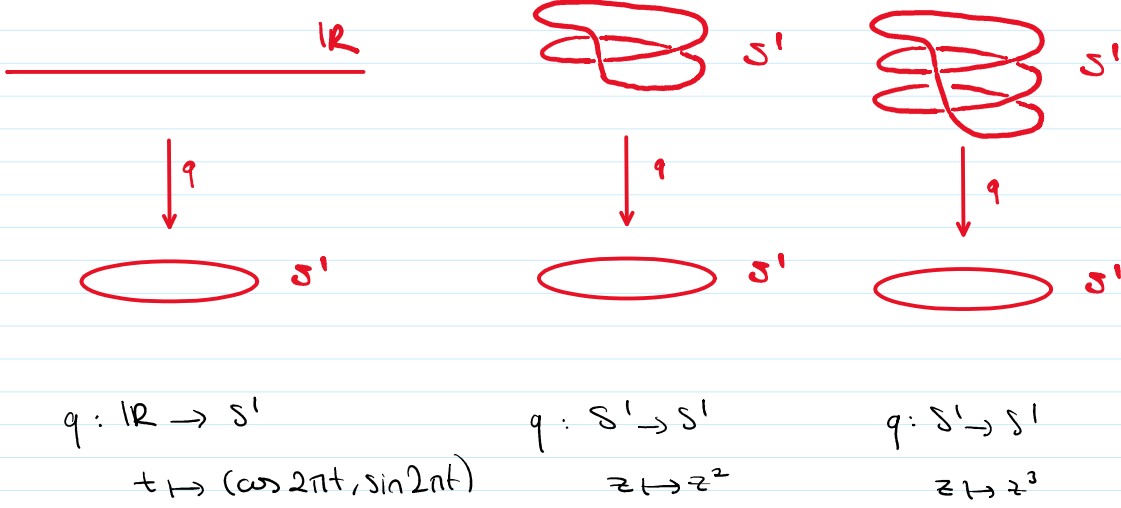
$(q_2 \tilde{q}_1 = q_1)$. Benzer şekilde $q_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$ de $\tilde{q}_2$ 'ye ykellir
 $(q_1 \tilde{q}_2 = q_2)$.

Unique Lifting Property'den dolayı, $\tilde{p}_1 \tilde{p}_2 = 1_{\tilde{X}_2}$ & $\tilde{p}_2 \tilde{p}_1 = 1_{\tilde{X}_1}$.

Bundan $\tilde{q}_1$ ve $\tilde{q}_2$ 'nin birbirinin tersi olan rk izomorfizmaları olduğu grlir. $\square$

MOTİVASYON:

S^1 'in örtü uzaylarından birkaç tanesi hatırlayalım:



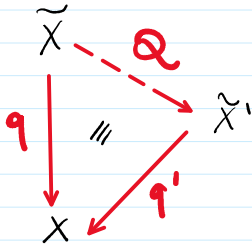
SORU: Bir X uzayının öyle bir örtü uzayı var mıdır ki diğer tüm örtü uzaylarını da örtsün?

S' uzayı için bunun cevabı : $\mathbb{R}$ örkle uzayı, S' 'in diğer örkle uzaylarını örter. ($\mathbb{R}$ 'nin basit bağlantılı olduğuna dikkat)

Teorem. (Universality of Simply Connected Coverings)

(a) $q: \tilde{X} \rightarrow X$ örkle dönüşüm ve $\tilde{X}$ basit bağlantılı olsun.

Eğer $q': \tilde{X}' \rightarrow X$ herhangi bir örkle dönüşüm ise



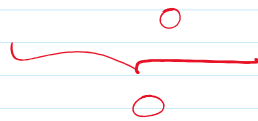
diagramını kommutatif yapan

$\exists Q: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$ örkle dönüşümü vardır.

(b) Aynı X uzayının iki basit bağlantılı örkle uzayı izomorftur.

İspat. (a) $e \in \tilde{X}$ ve $e' \in \tilde{X}'$ için $q(e) = q'(e')$ olsun.

$\tilde{X}$ basit bağlantılı old. için $q_*(\pi_1(\tilde{X}, e)) \subseteq q'_*(\pi_1(\tilde{X}', e'))$



sağlanır. (*)

(*)'den ve Covering homomorfizm kriteri teoreminden

dolayı, $\exists Q: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$ örkle homomorfizması vardır.

dolayısı, $\exists Q: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$ örkü homomorfizması vardır.

Bir başka deyişle, verilen diyagramı kommutatif

yapar $\exists Q: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$ dönüşümü vardır. Ayrıca

önceki sayfadaki Önerme (2)'den Q örkü dönüşümüdür.

(h) Covering isomorphism kriteri teoremini uygulayalım.

$q_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$ ve $q_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X$ örkü dönüşümleri olsun ve $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ basit bağlantılı olsunlar.

$$\underbrace{q_1(\pi_1(\tilde{X}_1))}_\circ = \underbrace{q_2(\pi_1(\tilde{X}_2))}_\circ \text{ olduğundan}$$

$\exists \psi: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ örkü izomorfizması vardır. Bir

başka deyişle, diyagramı kommutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\exists \psi} & \tilde{X}_2 \\ & \searrow q_1 & \swarrow q_2 \\ & X & \end{array}$$

yapar $\exists \psi$ örkü dönüşümü vardır ve ψ

homeomorfizmadır. Tanım'ın dolayısı,

$\tilde{X}_1$ ve $\tilde{X}_2$ örkü uzayları izomorftır denir. $\square$

NOT: Yukarıdaki teoremin (a) kısmı, X 'in basit bağlantılı örtük uzayının diğer tüm örtük uzaylarını örttüğünü söyler. (b)'yi de göz önüne alarak, X 'in basit bağlantılı örtük uzayının "unique up to isomorphism" olduğunu söyleyebiliriz.

Bu uzaya X 'in **evrensel örtüsü** denir.
(universal cover)

ÖRNEK: S^1 'in universal covering uzayı $\mathbb{R}$ 'dir.

$$\left(\begin{array}{l} q: \mathbb{R} \rightarrow S^1 \\ t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \end{array} \right)$$

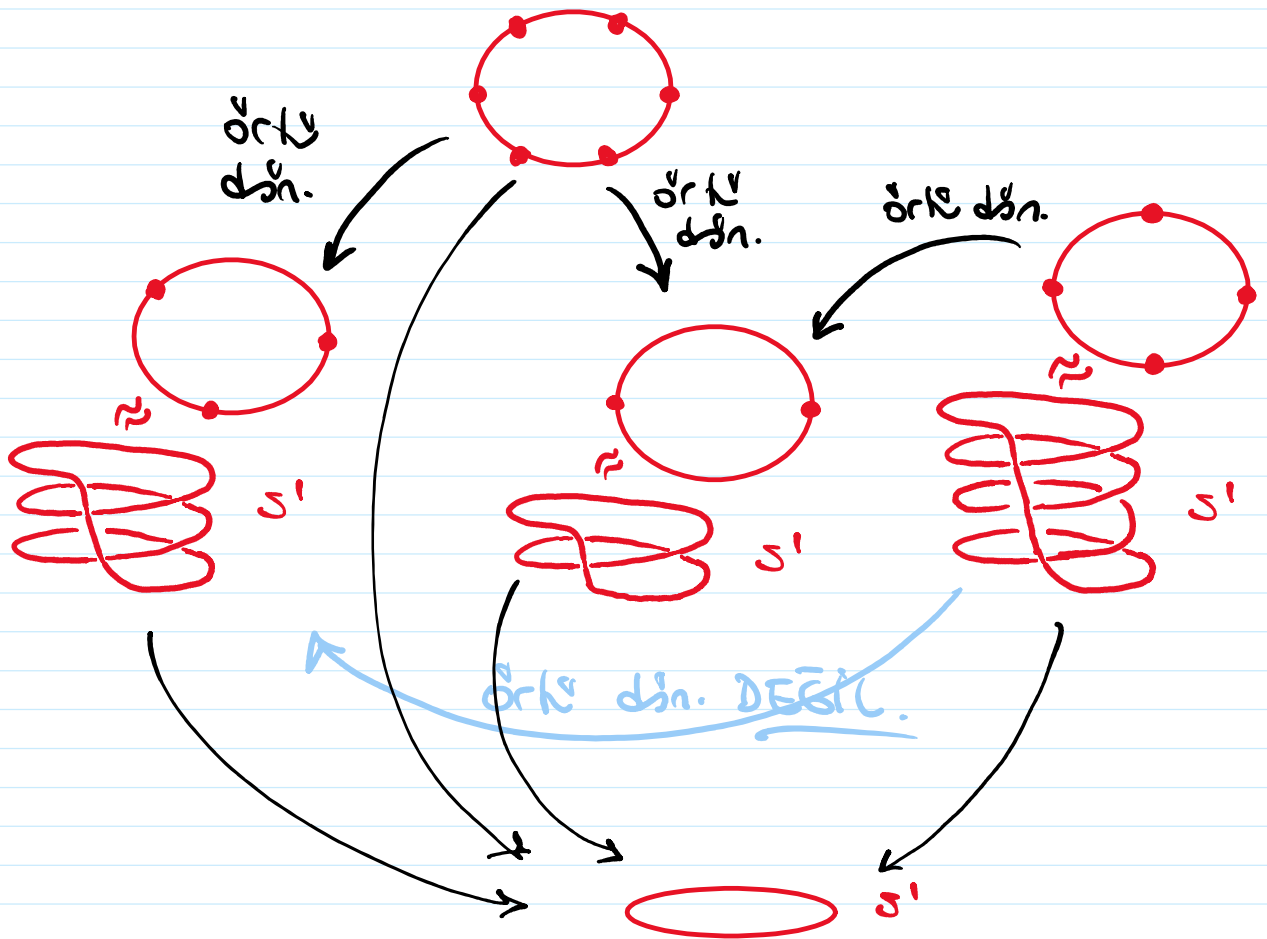
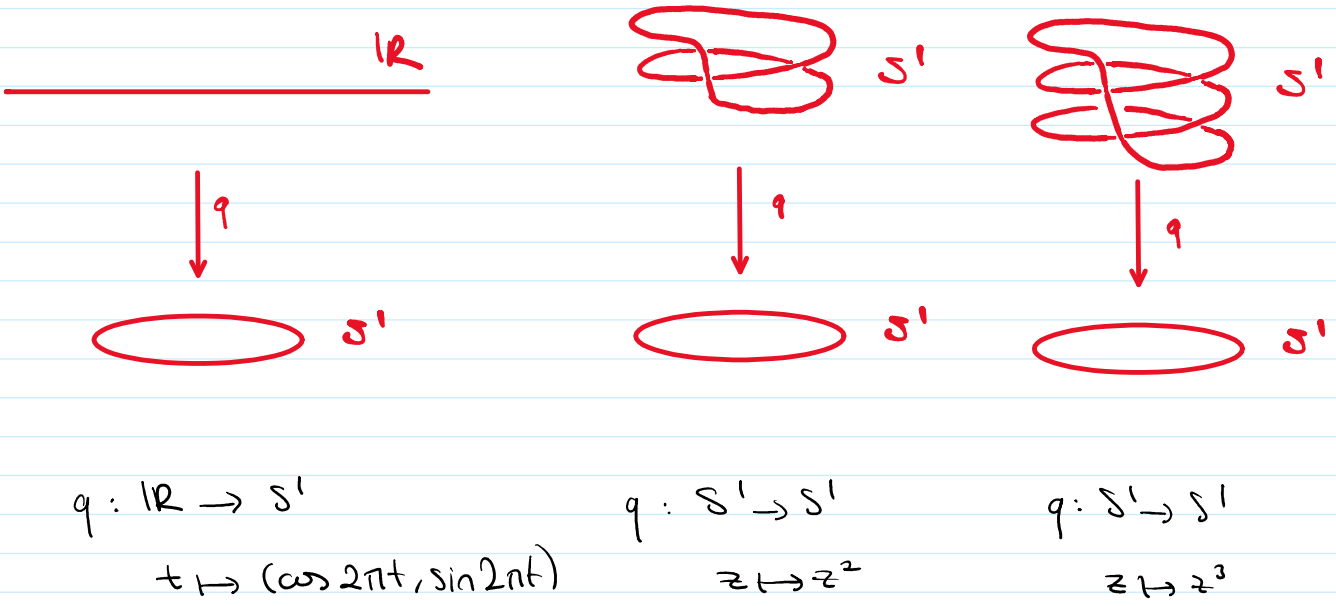
- Ödev:
1. T^2 'nin universal örtük uzayını bulunuz.
 2. T^n 'in universal örtük uzayını bulunuz.
 3. $\mathbb{R}P^2$ 'nin universal örtük uzayını bulunuz.

SORU: Her uzayın "evrensel örtük uzayı" var mıdır?

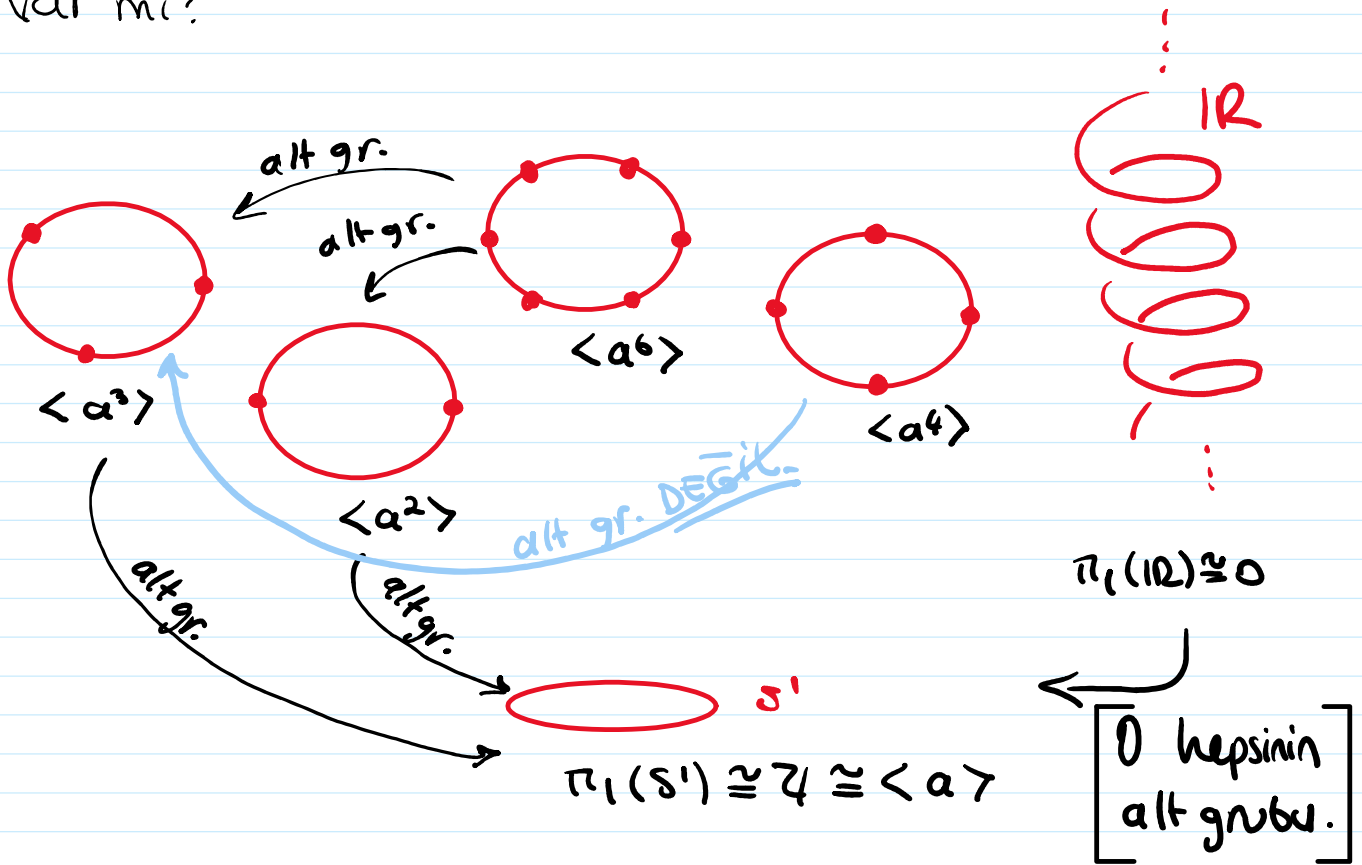
Teorem. (Existence of the Universal Covering Space)

Her bağlantılı ve yerel basit bağlantılı uzayın (örneğin, her bağlantılı manifoldun) evrensel örtük uzayı vardır.

Teorem¹ için Motivasyon



Örnek sayıları ile "temel gruplar" arasında bir ilişki var mı?



NOT: $\langle a^2 \rangle$ ile kastedilenin ne olduğunu açıklayalım:

$$q: S' \rightarrow S' \text{ dönüşümünde} \\ z \mapsto z^2$$

S' 'de (domain) alınan γ loop'un göüntüsü, S' 'de (codomain) 2'ye atıyor. Aslında kastedilen

$$q_* \left(\underset{\text{domain}}{\pi_1(S', x_0)} \right) = \langle a^2 \rangle.$$

Gözlem. $(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{\text{bij.}} \pi_1(X, x_0) \text{ 'in alt grupları.}$
 $\downarrow$
 (X, x_0)
 $(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longleftrightarrow q_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$

Teorem^A. X yol bağlantılı, yerel yol bağlantılı ve semilocally simply connected olsun. Bu durumda

$q : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ yol bağlantılı örtüş uzaylarının

taban noktasını tutan izomorfizma sınıflarının kümesi ile (basepoint preserving)

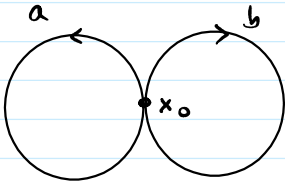
$\pi_1(X, x_0)$ 'in alt grupları arasında biyeksiyon var

ve bu biyeksiyon, örtüş uzayı $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ 'i $q_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$

alt grubuna eşler.

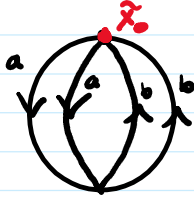
[Hatcher 1.38]

ÖRNEK. $S^1 \vee S^1$ 'in birkaç örtüş uzayını yazalım.



$$\pi_1(S' \vee S', x_0) \cong \langle a, b \rangle$$

$\uparrow q$



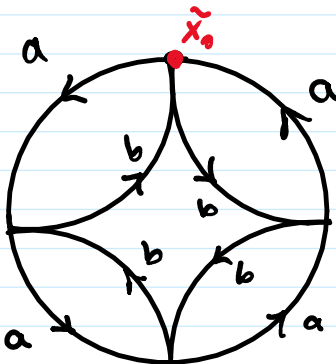
$$\langle a^2, b^2, ab \rangle \underset{\text{USA}}{\cong} \langle a^2, b^2, ba \rangle \text{ da yattır.}$$



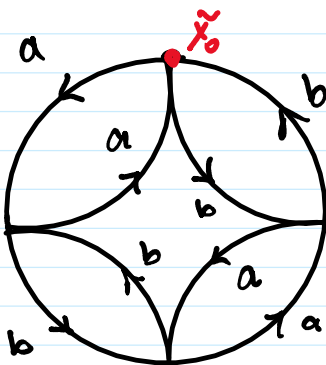
Peki neden bu ikisi aynı?

ba , $\langle a^2, b^2, ab \rangle$ 'nin elemanı mı?

Evet. Çünkü $ba = b^2(ab)^{-1}a^2$ olarak yazılır.



$$\langle a^4, b^4, ab, ba, a^2b^2 \rangle$$



$$\langle a^2, b^2, (ab)^2, (ba)^2, ab^2a \rangle$$

Tanım. $q: \tilde{X} \rightarrow X$ örtük dönüşümü olsun. $\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ izomorfizmalarına **deck (örtük) transformasyonları** denir.

Bu izomorfizmalar bir grup yapısı oluşur (bileşke işlemi ile). Bu grubu $G(\tilde{X})$ ile gösterebiliriz.

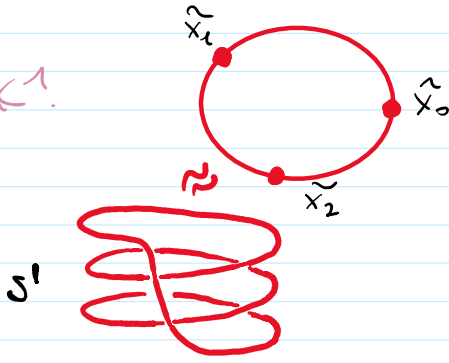
Hatırlatma: (Unique Lifting Property)

$q: \tilde{X} \rightarrow X$ örtük dönüşümü olsun. Y bağlantılı olsun. $f: Y \rightarrow X$ sür. dönüşümünden iki yükseltilmesi $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2: Y \rightarrow \tilde{X}$, Y 'nin bir tane noktasında aynı değeri alıyorsa, $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ 'dir.

(tüm Y 'de $\tilde{f}_1$ ve $\tilde{f}_2$ aynı değeri alır)

NOT: Unique Lifting Property'den dolayı, $\tilde{X}$ yol bağı. olm. ö.z. , deck transformasyonu $\tilde{X}$ 'teki bir elemanı "nereye götüreceği" bilgisine göre tam olarak tanımlanır.

ÖRNEK 1.



$$q : S' \rightarrow S$$

$$z \mapsto z^3$$



Yani $\tilde{x}_i, \tilde{x}_j \in q^{-1}(x_0)$ olm. $\exists z$.

izomorfizmalar $\tilde{x}_i \mapsto \tilde{x}_j^{-1}$ e g $\ddot{u}$ nl $\ddot{u}$ rl $\ddot{u}$ r.

(buna $\tilde{x}_i$ "normal disk uzağı" derimi verilecek.)

"Not"tan dolayı $\tilde{x}_0 \xrightarrow{id} \tilde{x}_0$ (1. izo.)

$$\tilde{x}_0 \mapsto \tilde{x}_1 \quad (2. \text{ izo. })$$

($2\pi/3$ saat y $\ddot{o}$ nl $\ddot{u}$ tersinde d $\ddot{o}$ nd $\ddot{u}$ rl $\ddot{u}$ rme)

$$\tilde{x}_0 \mapsto \tilde{x}_2 \quad (3. \text{ izo. })$$

($4\pi/3$ saat y $\ddot{o}$ nl $\ddot{u}$ tersinde d $\ddot{o}$ nd $\ddot{u}$ rl $\ddot{u}$ rme)

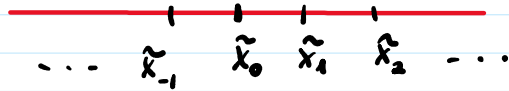
Dikkat: 2. izomorfizmanın adı f ise, 3. izo. f^2 olur.

Böylece $G(\tilde{X}) = \{id, f, f^2\} \cong \mathbb{Z}_3$.

ÖRNEK²

$$q: \mathbb{R} \rightarrow S^1$$

$$t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$



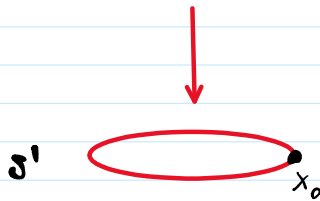
Buradaki izomorfizmalar

$$\tilde{x}_0 \mapsto \tilde{x}_2$$

$$\tilde{x}_0 \mapsto \tilde{x}_1 \quad \tilde{x}_2 \mapsto \tilde{x}_1$$

...

şeklinde.

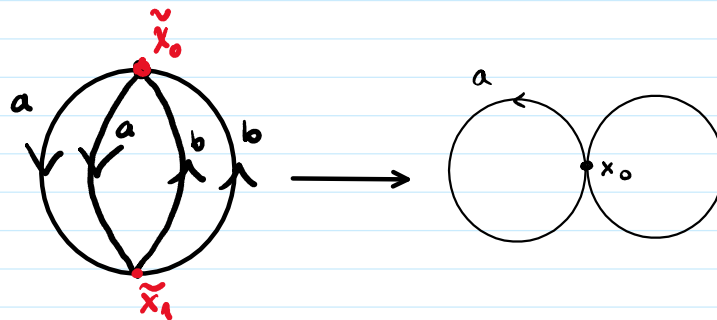


Bunlardan oluşan grubun generi

$\tilde{x}_0 \mapsto \tilde{x}_1$ izomorfizması.

Böylece $G(\tilde{X}) \cong \mathbb{Z}$.

ÖRNEK³



$S^1 \vee S^1$ 'in 2-katlı örtüsü

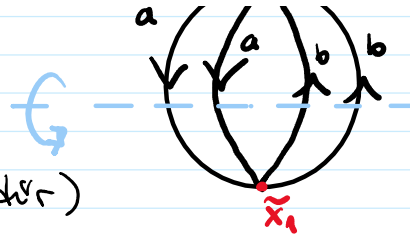
$$\tilde{x}_0 \mapsto \tilde{x}_0 \quad (1. \text{ izo.})$$

~ ~ ~



$$x_0 \mapsto x_0 \sim \dots$$

$\tilde{x}_0 \mapsto \tilde{x}_1$ (2. i. x. - mar
doğru boyunca döndür)



$$G(\tilde{X}) = \{ \text{id, "döndürme"} \} \cong \mathbb{Z}_2$$

Gözlem.

ÖRNEK¹ $q: S^1 \rightarrow S^1$ için
 $z \mapsto z^3$

$q_*(\pi_1(\tilde{S}_1, \tilde{x}_0)) \cong \langle a^3 \rangle$ bulduk (önceki bölümde)
&
 $G(\tilde{S}_1) \cong \mathbb{Z}_3$ bulduk (yukarıda).

$$G(\tilde{S}_1) \cong \pi_1(S^1, x_0) / q_*(\pi_1(\tilde{S}_1, \tilde{x}_0)) \cong \langle a \rangle / \langle a^3 \rangle$$

ÖRNEK² $q: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ için
 $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

$q_*(\underbrace{\pi_1(\tilde{S}_1, \tilde{x}_0)}_{\pi_1(\mathbb{R}, x)}) \cong 0$ & $G(\underbrace{\tilde{S}_1}_{\mathbb{R}}) \cong \mathbb{Z}$ bulduk.
(yukarıda)

$$G(\tilde{S}_1) \cong \pi_1(S'_1, x_0) / q_* (\pi_1(\tilde{S}_1, \tilde{x}_0)) \cong \mathbb{Z} / 0 \cong \mathbb{Z}$$

ÖRNEK³

$$q: \widetilde{S'_1 \vee S'_1} \rightarrow S'_1 \vee S'_1 \text{ için}$$

2 katlı örtüş
(yukarıdaki gibi)

$$q_* (\pi_1(\widetilde{S'_1 \vee S'_1}, \tilde{x}_0)) \cong \langle a^2, b^2, ab \rangle \text{ bulduk (önceki bölümde)}$$

&

$$G(\widetilde{S'_1 \vee S'_1}) \cong \mathbb{Z}_2 \text{ bulduk (yukarıda).}$$

$$G(\widetilde{S'_1 \vee S'_1}) \cong \pi_1(S'_1 \vee S'_1, x_0) / q_* (\pi_1(\widetilde{S'_1 \vee S'_1}, \tilde{x}_0))$$

$$\cong \langle a, b \rangle / \langle a^2, b^2, ab \rangle$$

relation'lara düşüyor

$$\cong \langle a, b \mid a^2=1, b^2=1, ab=1 \rangle$$

$$\cong \langle b \mid b^2=1 \rangle$$

$$\hookrightarrow a=b^{-1}$$

$$\cong \mathbb{Z}_2$$

Iddia: $G(X) \cong \pi_1(X, x_0) / q_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$

$(q_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \trianglelefteq \pi_1(X, x_0) \text{ normal alt grp ise}).$

Tanım. $q: \tilde{X} \rightarrow X$ örtüşümüne normal (ve ya regüler) deriz.



x' in her bir yükseltilmiş çifti $\tilde{x}, \tilde{x}'$ için

Öyle bir deck transformasyonu vardır ki $\tilde{x}'$ 'yi $\tilde{x}$ 'ye götürür.



Sevgisel olarak, normal örtüşüm uzayı maksimal simetriye sahip örtüşüm uzayıdır.

Yukarıdaki tüm örnekler normal örtüşüm uzayıdır.

Teorem. $q: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ örtk dönüşümü veilsin. Burada

X yol bağlantılı ve yerel yol-bağlantılı uzay ve $\tilde{X}$ da yol bağlantılıdır.

$H = q_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \subseteq \pi_1(X, x_0)$ alt grubunu alalım.

(a) $\tilde{X}$ örtk uzayı normaldir $\Leftrightarrow H \trianglelefteq \pi_1(X, x_0)$
normal altgrupdur.

(b) $G(\tilde{X}) \cong N(H)/H$.

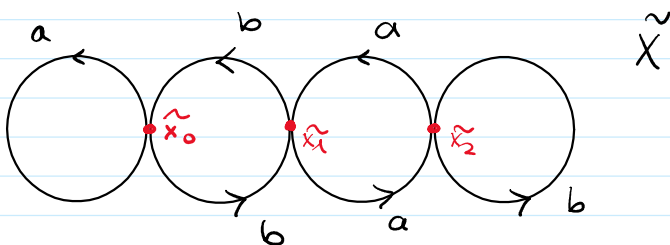
$\hookrightarrow H$ 'in $\pi_1(X, x_0)$ 'daki normalizer'i.

Özel olarak, $G(\tilde{X}) \cong \pi_1(X, x_0) / q_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$

eğer $\tilde{X}$ normal örtk uzayı ise.

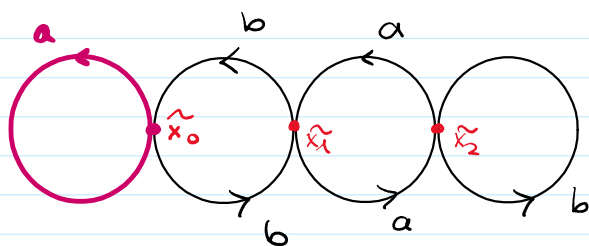
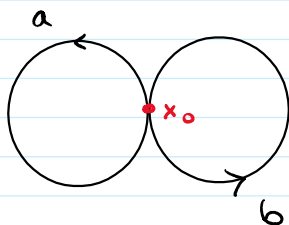
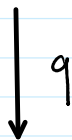
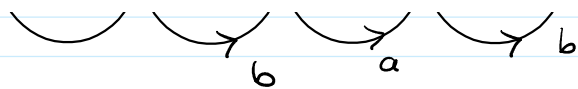
Böylece $\tilde{X} \rightarrow X$ eürsensel örtk ise, $G(\tilde{X}) \cong \pi_1(X)$.

ÖRNEK. (Normal örtk uzayı olmayan örnek)



$\nexists \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ izomorfizma:

$\tilde{x}_0 \mapsto \tilde{x}_2$ 'dir.



$\tilde{x}_0 \mapsto \tilde{x}_2$ 'dir.

Çünkü :

Soldaki $\tilde{x}_0$ 'daki a loop'unu

alalım. $\tilde{x}_0 \mapsto \tilde{x}_2$ ise

a da $\tilde{x}_2$ 'deki bir loop'a

taşınmalı. Ama mümkün
değil.

Aslında $G(\tilde{X}) \cong \{id\} \cong 0$.

Yukarıdaki teoreme göre $\tilde{X}$ normal örtü olmayı olma-
dığında $q_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \not\subseteq \pi_1(X, x_0)$ bulmalıyız.

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(S' \vee S', x_0) \cong \langle a, b \rangle$$

$$q_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \langle a, b^2, ba^2b^{-1}, bab^{-1}a^{-1} \rangle$$

$ba \in \pi_1(X, x_0)$ alalım.

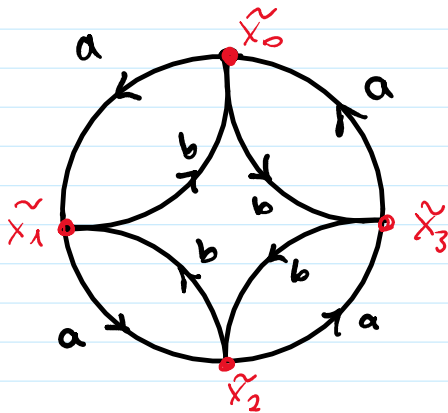


$ba \in \pi_1(X, x_0)$ alalım.

$$(ba)^{-1} (bab\bar{a}^{-1}b^{-1})(ba) = b \notin$$

Böylece $q_x(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \not\subseteq \pi_1(S' \vee S', x_0)$.

ÖRNEK⁴: $S' \vee S'$ 'in normal bir örtüye örnek.



$$q_x(\pi_1(\widetilde{S' \vee S'}, \tilde{x}_0))$$

$\cong$

$$\langle a^4, b^4, ab, ba, a^2b^2 \rangle$$

(4-katlı örtü)

$$\tilde{x}_0 \xrightarrow{\text{id}} \tilde{x}_0 \quad (1, \text{izo.})$$

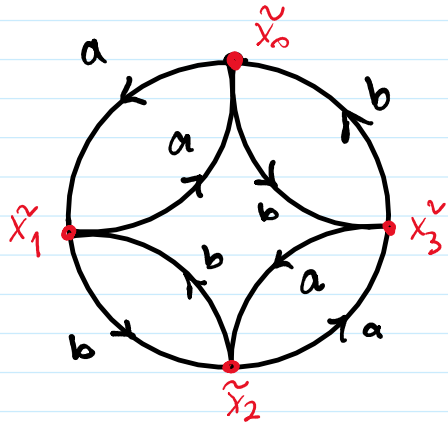
$$\tilde{x}_0 \mapsto \tilde{x}_1 \quad (\pi|_2 \text{ saat yönü tersinde döndürme})$$

$$\tilde{x}_0 \mapsto \tilde{x}_2 \quad (\pi \text{ —''—})$$

$$\tilde{x}_0 \mapsto \tilde{x}_3 \quad (3\pi/2 \text{ —''—})$$

$$G(X) \cong \mathbb{Z}_4$$

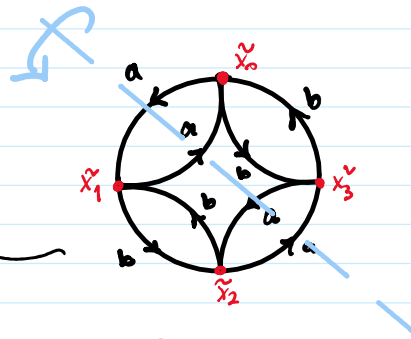
ÖRNEK 5. $S^1 \vee S^1$ in başka normal şekli var mı :



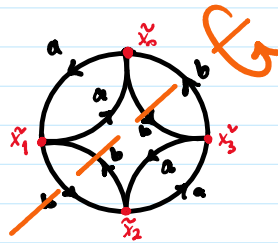
$$\langle a^2, b^2, (ab)^2, (ba)^2, ab^2a \rangle$$

$$\tilde{x}_0 \xrightarrow{id} \tilde{x}_0$$

$$\tilde{x}_0 \mapsto \tilde{x}_1$$



$$\tilde{x}_0 \mapsto \tilde{x}_3$$



$\tilde{x}_0 \mapsto \tilde{x}_2$ için marı ve tıncı dırdırmelerden sonra elde edilir.

$f : \tilde{x}_0 \mapsto \tilde{x}_1$ ve $g : \tilde{x}_0 \mapsto \tilde{x}_3$ diyelim.

$f \circ g = g \circ f : \tilde{x}_0 \mapsto \tilde{x}_2$ olur.

Ayrıca $f \circ f = f^2 = id$ & $g^2 = id$ olur.

Boyle $G(X) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ dir.

Tanım. $f, g : X \rightarrow Y$ ve $A \subseteq X$ verilsin.

Eğer $\exists H : X \times I \rightarrow Y : H(x, 0) = f(x)$

$$H(x, 1) = g(x)$$

$$H(a, t) = f(a) = g(a), \quad \forall a \in A.$$

sürekli dönüşüm varsa, f ve g A 'ya göre homotopik /
(f and g are homotopic relative to A)

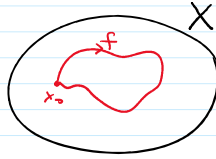
homotopik rel A denir. $f \simeq_* g$ ile gösterilir.

H 'ye f 'ten g 'ye homotopi rel A denir.

Notasyon. $X^I := \{ f : I \rightarrow X \text{ sürekli} \}$

$$C_n(X, x_0) := \{ f : I^n \rightarrow X \text{ sür.} \mid f(\partial I^n) = x_0 \}$$

Özel olarak, $C_1(X, x_0) = \{ f : I \rightarrow X \text{ sür.} \mid f(0) = x_0 = f(1) \}$ 'dir.



$\partial I^1 = \{0, 1\}$, f ile x_0 'a bağlanıyor.

$C_n(X, x_0)$, X^{I^n} 'in alt kümesidir & üzerinde kompakt-açık topoloji vardır.

π_1 vs. π_n

π_1	π_n
$f, g : I \rightarrow X$ sür., $f(0) = g(0) = x_0$ & $f(1) = g(1) = x_0$ olsun. $f \simeq_{x_0} g \Leftrightarrow \exists H : I \times I \rightarrow X$ sür. (hom. rel x_0) $H(s, 0) = f(s)$ $H(s, 1) = g(s)$	$f, g : I^n \rightarrow X$ sür., $f(\partial I^n) = x_0 = g(\partial I^n)$ olsun. $f \simeq_{x_0} g \Leftrightarrow \exists G : I^n \times I \rightarrow X$ sür. (hom. rel x_0) $G(s, 0) = f(s)$ $G(s, 1) = g(s)$

(hom. rel. x_0)

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= f(s) \\ H(s, 1) &= g(s) \\ \underbrace{H(0, t) = x_0} \\ H(1, t) &= x_0 \\ H(\partial I, t) &= x_0 \end{aligned}$$

• $\sim$, $C_1(X, x_0)$ üzerinde
bir denklik bağıntısıdır.

• $\pi_1(X, x_0)$
" Bu bağıntının denklik
sınıflarının kümesi.

↓
Grup oluşturur.

(hom. rel. x_0)

$$\begin{aligned} G(s, 0) &= f(s) \\ G(s, 1) &= g(s) \\ G(\partial I^n, t) &= x_0 \end{aligned}$$

• $\sim$, $C_n(X, x_0)$ üzerinde
bir denklik bağıntısıdır.

• $\pi_n(X, x_0)$
" Bu bağıntının denklik
sınıflarının kümesi.

↓
Grup oluşturur?
Grubun işlemi ne?

Tanım. $f, g: I^n \rightarrow X$ ve $f(\partial I^n) = x_0 = g(\partial I^n)$ veilsin.

$C_n(X, x_0)$ 'da f ve g 'nin uca uca ekleme kuralı şu
şekilde verilir:

$$(f * g)(s_1, \dots, s_n) := \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n) & , 0 \leq s_1 \leq 1/2 \\ g(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n) & , 1/2 \leq s_1 \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} s_1 = \frac{1}{2} \text{ ise } f(\underbrace{1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n}_{\in \partial I^n}) &= x_0 \\ g(\underbrace{0, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n}_{\in \partial I^n}) &= x_0 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} f(\dots) \\ g(\dots) \end{aligned}} \right\} \Rightarrow \text{Böylece} \\ f * g & \text{ iyi tanımlıdır.}$$

NOT:

$$\partial I^n = \left\{ (s_1, \dots, s_n) \in I^n \mid \prod_{i=1}^n s_i(1-s_i) = 0, \quad 0 \leq s_i \leq 1 \right. \\ \left. i=1, 2, \dots, n \right\}$$

Yani $(s_1, \dots, s_n) \in \partial I^n$ 'in en az bir bileşeni
ya 0 ya da 1'dir.

- Denklik sınıfları üzerinde $*$ işlemini şu şekilde tanımlayalım:

$$[f] * [g] := [f * g].$$

$\pi_n(X, x_0)$, $*$ işlemi ile bir grup belirtir. Bu gruba X 'in n -inci homotopi grubu denir.

$*$ iyi tanımlıdır:

$f \simeq_{x_0} f'$ ve $g \simeq_{x_0} g'$ olsun.

Göst. istenen: $f * g \simeq_{x_0} f' * g'$.

$f \simeq_{x_0} f'$: $\exists H : I^n \times I \rightarrow X$ s.t. vardır ki

$$H(s, 0) = f(s)$$

$$H(s, 1) = f'(s)$$

$$H(\partial I^n, t) = x_0.$$

$g \simeq_{x_0} g'$: $\exists G : I^n \times I \rightarrow X$ s.t. vardır ki

$$G(s, 0) = g(s)$$

$$G(s, 1) = g'(s)$$

$$G(\partial I^n, t) = x_0$$

($s \in I^n$ ve $t \in I$ olm. 2.)

$$K: I^n \times I \rightarrow X$$

$$K(s_1, \dots, s_n, t) = \begin{cases} H(2s_1, s_2, \dots, s_n, t) & , 0 \leq s_1 \leq 1/2 \\ G(2s_1-1, s_2, \dots, s_n, t) & , 1/2 \leq s_1 \leq 1 \end{cases}$$

tanımlayalım.

$$\bullet H(\underbrace{1, s_2, \dots, s_n}_{\in \partial I^n}, t) = x_* = G(\underbrace{0, s_2, \dots, s_n}_{\in \partial I^n}, t) \text{ 'dir}$$

ve H, G süreklidir. Böylece Pasting

lemma'dan K süreklidir.

$$\begin{aligned} \bullet K(s_1, \dots, s_n, 0) &= \begin{cases} H(2s_1, s_2, \dots, s_n, 0) & , 0 \leq s_1 \leq 1/2 \\ G(2s_1-1, s_2, \dots, s_n, 0) & , 1/2 \leq s_1 \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n) & , 0 \leq s_1 \leq 1/2 \\ g(2s_1-1, s_2, \dots, s_n) & , 1/2 \leq s_1 \leq 1 \end{cases} \\ &= (f * g)(s_1, \dots, s_n). \end{aligned}$$

Benzer şekilde $K(s_1, \dots, s_n, 1) = (f' * g')(s_1, \dots, s_n)$

elde edilir (ödev).

$$\bullet (s_1, \dots, s_n) \in \partial I^n \text{ olsun.}$$

Böylece s_i 'lerden en az biri ya 0 ya da 1'dir.

- Eğer $s_2, \dots, s_n$ 'lerden en az biri ya 0 ya da 1 ne

$$\dots, \underbrace{\dots}_{\in \partial I^n}, \dots$$

$$\begin{aligned}
 K(s_1, \dots, s_n, t) &= \begin{cases} H(\overbrace{2s_1, s_2, \dots, s_n}^{\in \partial I^n}, t), & 0 \leq s_1 \leq 1/2 \\ H(\overbrace{2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n}^{\in \partial I^n}, t), & 1/2 \leq s_1 \leq 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} x_0, & 0 \leq s_1 \leq 1/2 \\ x_0, & 1/2 \leq s_1 \leq 1 \end{cases} \\
 &= x_0.
 \end{aligned}$$

- Eğer $s_1 = 0$ ise

$$\begin{aligned}
 K(0, s_2, \dots, s_n, t) &\stackrel{K \text{ kumu \& } s_1=0}{=} H(2 \cdot 0, s_2, \dots, s_n, t) \\
 &= H(\underbrace{0, s_2, \dots, s_n}_{\in \partial I^n}, t) \\
 &= x_0.
 \end{aligned}$$

- Eğer $s_1 = 1$ ise

$$\begin{aligned}
 K(1, s_2, \dots, s_n, t) &= H(2 \cdot 1 - 1, s_2, \dots, s_n, t) \\
 &= H(\underbrace{1, s_2, \dots, s_n}_{\in \partial I^n}, t) \\
 &= x_0.
 \end{aligned}$$

Böylece K , $f * g$ ve $f' * g'$ arasında bir homotopidir. $\square$

Teorem. $\pi_n(X, x_0)$, $*$ işlemi altında bir grup belirtir.

İspat. • $([f] * [g]) * [h] = [f] * ([g] * [h])$ old. göstermek için $(f * g) * h \simeq_x f * (g * h)$ old. ispatlanır. (Ödev)

- $c_0: I^n \rightarrow X$, $c_0(I^n) = x_0$ sabit dñ. olsun.

$[c_0]$, $\pi_n(X, x_0)$ 'in birim elemanıdır. Çünkü

$f * c_0 \simeq_x f$ & $c_0 * f \simeq_x f$ olduğu için - (Ödev)

$[f] * [c_0] = [f]$ & $[c_0] * [f] = [f]$ elde edilir.

- $f: I^n \rightarrow X$ sürekli dñ. için

$\bar{f}: I^n \rightarrow X$, $\bar{f}(s_1, \dots, s_n) = f(1-s_1, s_2, \dots, s_n)$

tanımlansın.

$f * \bar{f} \simeq_x c_0$ & $\bar{f} * f \simeq_x c_0$ olduğundan - (Ödev)

$[f] * [\bar{f}] = [c_0]$ & $[\bar{f}] * [f] = [c_0]$ elde edilir. $\square$

Teorem. $n \geq 2$ için, $\pi_n(X, x_0)$ Abel gruptur.

Dikkat: Bu teorem π_1 için geçerli DEĞİL!

İspat. Göstermek isteniler:

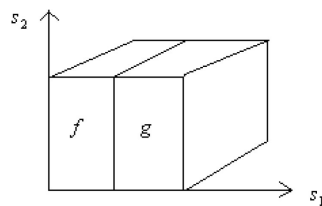
$$\forall [f], [g] \in \pi_n(X, x_0), [f] * [g] = [g] * [f].$$

Bunun için $f * g \simeq_{x_0} g * f$ old. göstermek yeterli.

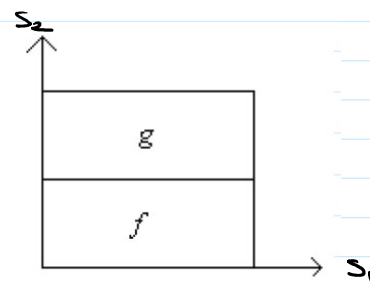
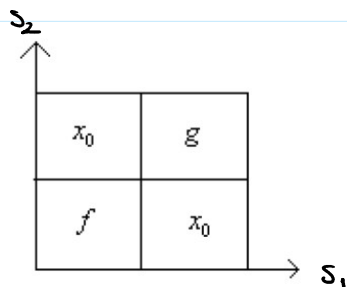
I^n 'in $s_1 s_2$ -yüzüne alalım.

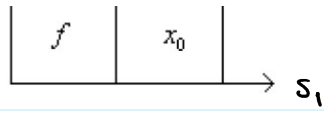
f ve g , Şekil (1)'deki gibi alınırsa, dört kenarın ve merkezdeki dikey çizginin her noktası için

$$(f * g)(s_1, s_2) = x_0 \text{ olur.}$$

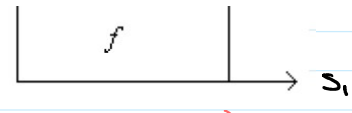


Şekil (1)

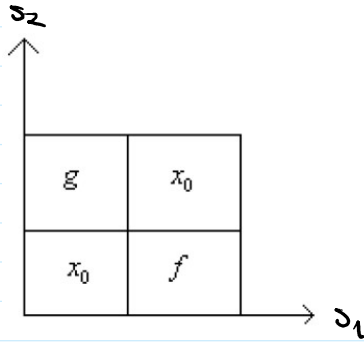




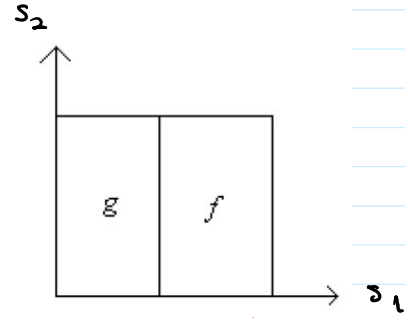
Şekil (2)



Şekil (3)



Şekil (4)



Şekil (5)

– Şekil (1)'den Şekil (2)'ye geçmek için

$$H_1(s_1, s_2, \dots, s_n, t) = \begin{cases} f(2s_1, \frac{2s_2}{2-t}, s_3, \dots, s_n), & 0 \leq s_1 \leq 1/2, \quad 0 \leq s_2 \leq 1 - \frac{t}{2} \\ x_0, & 0 \leq s_1 \leq 1/2, \quad 1 - \frac{t}{2} \leq s_2 \leq 1 \\ g(2s_1 - 1, \frac{2s_2 - t}{2-t}, s_3, \dots, s_n), & 1/2 \leq s_1 \leq 1, \quad \frac{t}{2} \leq s_2 \leq 1 \\ x_0, & 1/2 \leq s_1 \leq 1, \quad 0 \leq s_2 \leq \frac{t}{2} \end{cases}$$

dönüşümünü tanımlayalım. H_1 iyi tanımlıdır ve

Pasting Lemma'dan sürekli. Ayrıca

$$H_1(s_1, \dots, s_2, 0) = \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n), & 0 \leq s_1 \leq 1/2, \quad 0 \leq s_2 \leq 1 \\ g(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n), & 1/2 \leq s_1 \leq 1, \quad 0 \leq s_2 \leq 1 \end{cases} = (f * g)(s_1, \dots, s_n)$$

ℓ

$$H_1(s_1, s_2, \dots, s_n, 1) = \begin{cases} f(2s_1, 2s_2, s_3, \dots, s_n), & 0 \leq s_1 \leq 1/2, \quad 0 \leq s_2 \leq 1/2 \\ x_0, & 0 \leq s_1 \leq 1/2, \quad 1/2 \leq s_2 \leq 1 \\ g(2s_1 - 1, 2s_2 - 1, s_3, \dots, s_n), & 1/2 \leq s_1 \leq 1, \quad 1/2 \leq s_2 \leq 1 \\ x_0, & 1/2 \leq s_1 \leq 1, \quad 0 \leq s_2 \leq 1/2 \end{cases}$$

olduğundan dolayı, H_1 $f \times g$ ile Şekil(2)'de verilen dönüşüm arasında bir homotopidir.

- Şekil(2)'den Şekil(3)'e geçmek için

$$H_2(s_1, s_2, \dots, s_n, t) = \begin{cases} f(\frac{2s_1}{1+t}, 2s_2, s_3, \dots, s_n), & 0 \leq s_1 \leq \frac{1+t}{2}, \quad 0 \leq s_2 \leq 1/2 \\ x_0, & 0 \leq s_1 \leq \frac{1+t}{2}, \quad \frac{1+t}{2} \leq s_2 \leq 1 \\ g(\frac{2s_1 - 1 + t}{1+t}, 2s_2 - 1, s_3, \dots, s_n), & \frac{1-t}{2} \leq s_1 \leq 1, \quad \frac{1}{2} \leq s_2 \leq 1 \\ x_0, & \frac{1-t}{2} \leq s_1 \leq 1, \quad t \leq s_2 \leq \frac{1+t}{2} \end{cases}$$

dönüşümünü tanımlayalım. H_2 iyi tanımlıdır ve

Pasting Lemma'dan sürekli. Ayrıca

$$H_2(s_1, s_2, \dots, s_n, 0) = \begin{cases} f(2s_1, 2s_2, s_3, \dots, s_n), & 0 \leq s_1 \leq 1/2, \quad 0 \leq s_2 \leq 1/2 \\ x_0, & 0 \leq s_1 \leq 1/2, \quad 1/2 \leq s_2 \leq 1 \\ g(2s_1 - 1, 2s_2 - 1, s_3, \dots, s_n), & 1/2 \leq s_1 \leq 1, \quad 1/2 \leq s_2 \leq 1 \\ x_0, & 1/2 \leq s_1 \leq 1, \quad 0 \leq s_2 \leq 1/2 \end{cases}$$

&

↪ Şekil (2)'deki dñ.

$$H_2(s_1, \dots, s_2, 1) = \begin{cases} f(s_1, 2s_2, \dots, s_n), & 0 \leq s_1 \leq 1, \quad 0 \leq s_2 \leq 1/2 \\ g(s_1, 2s_2 - 1, \dots, s_n), & 0 \leq s_1 \leq 1, \quad 1/2 \leq s_2 \leq 1 \end{cases} \text{ dir.}$$

↪ Şekil (3)'teki dñ.

- Şekil (3)'ten Şekil (4)'e geçmek için

$$H_3(s_1, s_2, \dots, s_n, t) = \begin{cases} f\left(s_1 \cdot (1+t), \frac{2s_2 \cdot (1-t)}{1+t}, s_3, \dots, s_n\right), & 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{1+t}, \quad 0 \leq s_2 \leq 1/2 \\ g(s_1 \cdot (1+t), t(2s_2 - 1), s_3, \dots, s_n), & 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{1+t}, \quad \frac{1}{2} \leq s_2 \leq \frac{1+t}{2} \\ g\left(\frac{(2s_1 - t)(1-t)}{2}, \frac{2s_2 - 1 + t}{1+t}, s_3, \dots, s_n\right), & \frac{t}{2} \leq s_1 \leq 1, \quad \frac{1}{2} \leq s_2 \leq 1 \\ f\left(\frac{(2s_1 - t)t}{2-t}, s_2 \cdot (1+t), s_3, \dots, s_n\right) & \frac{t}{2} \leq s_1 \leq 1, \quad 1-t \leq s_2 \leq \frac{1}{1+t} \end{cases}$$

dñ'sümñü tanımlayalım. H_2 iyi tanımlıdır ve

Pasting Lemma'dan sürekli. Ayrıca

$$H_3(s_1, \dots, s_2, 0) = \begin{cases} f(s_1, 2s_2, \dots, s_n), & 0 \leq s_1 \leq 1, \quad 0 \leq s_2 \leq 1/2 \\ g(s_1, 2s_2 - 1, \dots, s_n), & 0 \leq s_1 \leq 1, \quad 1/2 \leq s_2 \leq 1 \end{cases}$$

&

$$H_3(s_1, s_2, \dots, s_n, 1) = \begin{cases} x_0, & 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq s_2 \leq 1/2 \\ g(2s_1, 2s_2 - 1, s_3, \dots, s_n), & 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq s_2 \leq 1 \\ x_0, & \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1, \quad \frac{1}{2} \leq s_2 \leq 1 \\ f(2s_1 - 1, 2s_2, s_3, \dots, s_n) & \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1, \quad 0 \leq s_2 \leq 1/2 \end{cases}.$$

- Şekil (4)'ten Şekil(5)'e geçmek için

$$H_4(s_1, s_2, \dots, s_n, t) = \begin{cases} x_0, & 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq s_2 \leq \frac{1-t}{2} \\ g\left(2s_1, \frac{2s_2 - 1 + t}{1+t}, s_3, \dots, s_n\right), & 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1-t}{2} \leq s_2 \leq 1 \\ x_0, & \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1, \quad \frac{1+t}{2} \leq s_2 \leq 1 \\ f\left(2s_1 - 1, \frac{2s_2}{1+t}, s_3, \dots, s_n\right) & \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1, \quad 0 \leq s_2 \leq \frac{1+t}{2} \end{cases}$$

değişimin tanımlayalım. H_4 iyi tanımlıdır ve

Pasting Lemma'dan sürekli. Ayrıca

$$H_4(s_1, s_2, \dots, s_n, 0) = \begin{cases} x_0, & 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq s_2 \leq \frac{1}{2} \\ g(2s_1, 2s_2 - 1, s_3, \dots, s_n), & 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq s_2 \leq 1 \\ x_0, & \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1, \quad \frac{1}{2} \leq s_2 \leq 1 \\ f(2s_1 - 1, 2s_2, s_3, \dots, s_n) & \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1, \quad 0 \leq s_2 \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Q

$$H_4(s_1, \dots, s_2, 1) = \begin{cases} g(2s_1, s_2, \dots, s_n), & 0 \leq s_1 \leq 1/2, \quad 0 \leq s_2 \leq 1 \\ f(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n), & 1/2 \leq s_1 \leq 1, \quad 0 \leq s_2 \leq 1 \end{cases} = (g * f)(s_1, \dots, s_n) .$$

Notasyon: $\pi_n(X, x_0)$ Abel olduğundan dolayı ($n > 1$ için), grup işlemi genelde "+" ile gösterilir.

NOT: $\pi_n(X, x_0) = \{ [f] \mid f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0) \text{ s'cr.} \}$ olduğunu söyledik.

$\pi_n(X, x_0) = \{ [f] \mid f : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0) \text{ s'cr.} \}$ olarak da yazılabilir.

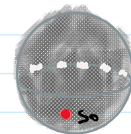
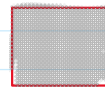
↓

Çünkü $I^n / \partial I^n \approx S^n$
($I^n / \partial I^n$ bölün uzayı S^n 'e homeo.)

Örneğin, $I / \{0, 1\} \approx S^1$



$I^2 / \partial I^2 \approx S^2$



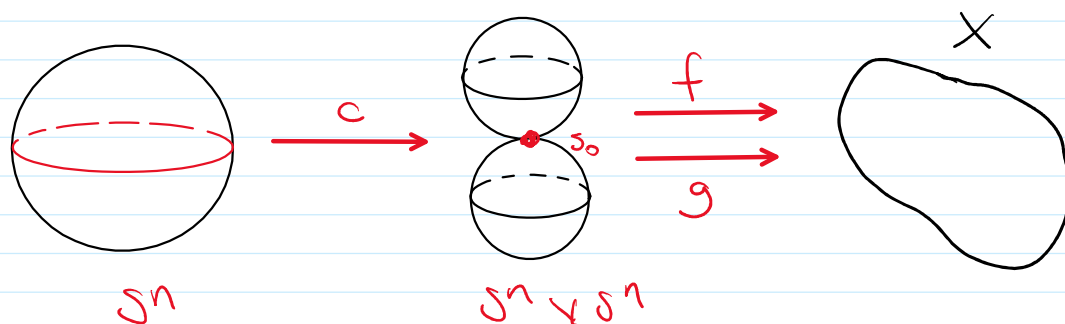
I^2 'nin sınırını
tek noktaya b'se

NOT: $\pi_0(X) : X$ 'in bağlantılı bileşenlerin kümesidir.

Çünkü: $I^0 = \text{nokta}$ & $\partial I^0 = \emptyset$. Böylece

$$\pi_0(X) = \{ [f] : f: \{p\} \rightarrow X \} \text{ olur.}$$

$f+g$ 'nin Geometrik Yorumu:



$f+g, S^n \xrightarrow{c} S^n \vee S^n \rightarrow X$ bileşkeni olarak
görselleştir.

(burada, c ∂S^n 'i S^n 'de bir noktaya
(ekvator)
gösterebilir.)

Hatırlatma.

Teorem. α, X 'te x_0 'dan x_1 'e bir yol olsun.

Teorem. α , X 'te x_0 'den x_1 'e bir yol olsun.

$$\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$$

$$[f] \longmapsto \hat{\alpha}([f]) = [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]$$

denklemler izomorfizmadır.



$n \geq 1$ için benzer bir teorem

Teorem. $n \geq 1$ ve X yol bağlantılı uzay olsun.

α, X' 'te x_0 'dan x_1 'e bir yol olsun.

$\hat{\alpha} : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_1)$ izomorfizmadır.

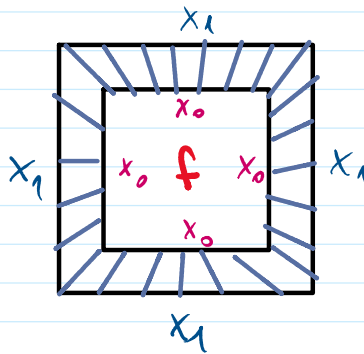
$$[f] \mapsto [\alpha f]$$

Burada, $\hat{\alpha}, f$ 'i αf 'e şu şekilde düşünelim:

f 'in domain'ini I^n 'de daha küçük bir kübe

bizim ve sonra α yolunu bu kâplerin sınırlarından

x_0 'dan x_1 'e doğru radyal olarak yerleştiririz.



NOT: $n=1$ alındığında " $\hat{\alpha}$ ", hatırlatma'daki teoremden

$\hat{\alpha}$ ile çakışır, gösterim farklı olmasına rağmen.

İspat Özeti.

$$(1) \alpha(f+g) \simeq \alpha f + \alpha g.$$

$$(2) (\alpha \beta) f \simeq \alpha(\beta f), \quad \beta: x_0' \rightarrow x_1' \text{ yol olm. dz.}$$

$$(3) c_{x_0} f \simeq f, \quad c_{x_0}, x_0' \text{ da sabit yol olm. dz.}$$

$$(4) \hat{\alpha}, \alpha \text{ veya } f \text{ 'in homotopilerine göre iyi tanımlıdır.}$$

$\Downarrow$

$$(1), \hat{\alpha}' \text{ 'nin grup homomorfizması old. söyler.}$$

$$(2) \text{ ve } (3), \hat{\alpha}' \text{ 'nin tersinin old. söyler. Aslında}$$

$$\overline{\alpha}(t) = \alpha(1-t) \text{ ise } \hat{\alpha}^{-1} = \hat{\overline{\alpha}} \text{ 'dir. } \square$$

Teorem. $n \geq 1$ için, $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, h(x_0))$ sürekli dönüşümün indirgenmiş homomorfizması

$$h_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, h(x_0))$$

$$[f] \mapsto h_*([f]) = [h \circ f]$$

bu özellikleri sağlar:

- $n \geq 1$ için h_* grup homomorfizmasıdır.
 - $(h \circ k)_* = h_* \circ k_*$
 - $\text{id}_* = \text{id}_{\pi_n(X, x_0)}$
- } Funtorial özellikler

Corollary. π_n funktördür.

Corollary. $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, h(x_0))$ homotopi denklik ise

$h_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, h(x_0))$ izomorfizmadır ($n \geq 1$ için).

ÖRNEK. $\mathbb{R}^n$ bölünebilir olduğundan $\mathbb{R}^n$, $\{x\}$ yayı

ve aynı homoloji tipindedir. Böylece $\pi_i(\mathbb{R}^n) \cong 0, \forall i \geq 1$.

Teorem. $q: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ örtk' dönüşüm ise
 $q_*: \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ izomorfizmadır, $\forall n \geq 2$.

İspat. • $q_*: \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ surjektiftir:

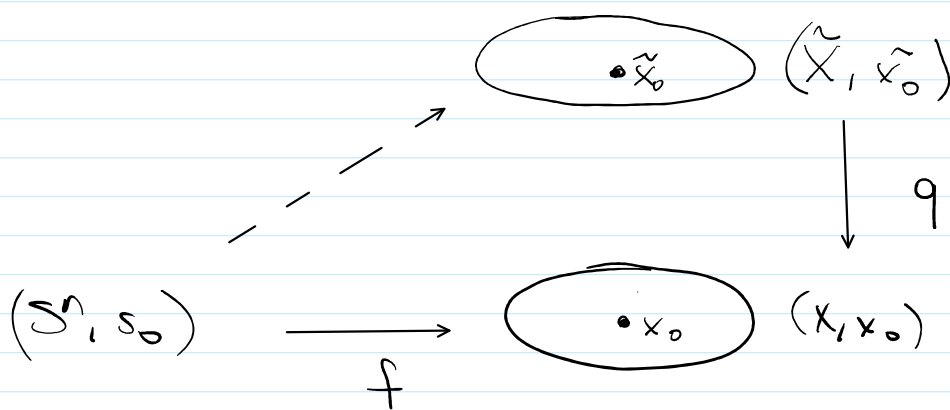
$[f] \in \pi_n(X, x_0)$ alalım (burada $f: (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ örtk.)

$\pi_1(S^n) \cong 0, n \geq 2$ için old. biliyoruz.

Böylece $f_* (\pi_1(S^n, s_0)) = 0 \subseteq p_* (\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$

bulunur. Lifting kriterinden dolayı, f 'in

$\tilde{f}: (S^n, s_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ yekeltilmisi vardır.



$q \circ \tilde{f} = f$ olduğundan $[f] = [q \circ \tilde{f}] = q_*([\tilde{f}])$

İndirgen Bütün n n-örneklerdir

bulunur. Böylece q_* surjektiftir.

- $q_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ injektiftir. Çünkü:

Hatırlatma

Teoremi. $q: \tilde{X} \rightarrow X$ örtü dönüşümü ve $q(x_0) = x_0$ olsun. Böylece $q_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ dönüşümü injektiftir.

□

ÖRNEK. $q: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ örtü dönüşümü verilsin.
 $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

$n \geq 2$ için, $q_* : \pi_n(\mathbb{R}) \rightarrow \pi_n(S^1)$ izomorfizma olduğundan $\pi_n(S^1) \cong \pi_n(\mathbb{R}) \cong 0$. □

ÖRNEK. T^n 'in evrensel örtü uzayı $\mathbb{R}^n$ 'dir. (KEDEK?)

Böylece $q: \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$ evrensel örtü dönüşümü

için $q_* : \pi_i(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\cong} \pi_i(T^n), \forall i \geq 2$.

Böylece $\pi_i(T^n) \cong \pi_i(\mathbb{R}^n) \cong 0, \forall i \geq 2$.

Tanım. $\forall n \geq 2$ için $\pi_n(X) \cong 0$ oluyorsa, X 'e aspherical uzay denir.

ÖRNEK. S^1 ve T^n aspherical uzaydır.

KAYNAKLAR

1. J. Evan's lecture notes: <http://www.homepages.ucl.ac.uk/~ucahjde/tg/html/index.html>
1. A. Hatcher, Algebraic Topology <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>
2. H. Herrlich, G. E. Strecker, Category Theory: An Introduction.
3. J. G. Hocking, G. S. Young, Topology, Addison Wesley.
4. Sze-Tsen Hu, Homotopy Theory.
5. İ. Karaca, Topoloji: Teorik ve Uygulama Alanlarıyla, Palme.
6. C. Kinsey, Topology of Surfaces, Springer.
7. J. Lee, Introduction to Topological Manifolds, Springer.
8. Tom Leinster, Basic Category Theory. [\[1612.09375\] Basic Category Theory](#)
9. L. Maxim, Lecture Notes on Homotopy Theory and Applications. University of Wisconsin-Madison.
10. J. Munkres, Topology, Pearson.
11. H. Sato, Algebraic Topology: An Intuitive Approach, Translations of Mathematical Monographs.
12. I. M. Singer, J. A. Thorpe, Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry, Springer.
13. Youtube: Math at Andrews University Channel, Presented by Anthony Bosman.

